Método Dinâmico de ensino

MATEMÁTICA

Prof. José dos Santos Moreira

ÍNDICE

PORCENTAGEM

É a razão entre um determinado número e 100.

EXEMPLO 1

25% significa 25 em cada 100.

Na **forma fracionária** : 25/100 que simplificando dá 1/4 e 1/4 na **forma decimal** é 0,25.

Assim, saiba que:

PERCENTAGEM	FRACIONARIA	DECIMAL
50%	50/100 = 1/2	0,5
25%	25/100 = 1/4	0,25
75%	75/100 = 3/4	0,75
20%	20/100 = 1/5	0,2
10%	10/100 = 1/10	0,1

EXEMPLO 2

A) Passe para a forma decimal e fracionária:

1) 30% 3) 45%
2) 80% 4) 5%

B) Passe para a forma percentual e fracionária:

1) 0,4 4) 0,02
2) 0,65 5) 0,015
3) 0,125 6) 0,75

EXEMPLO 3

Em uma mistura, colocamos 4 partes de areia e 1 parte de cimento. Podemos dizer que a proporção de cimento da mistura á de:
Uma parte sobre um total de cinco partes da mistura ou seja, 1/5.

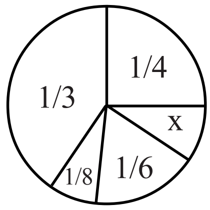
E na forma PERCENTUAL, a percentagem de cimento na mistura é 1/5 = 20/100 ou 20%.

Podemos também afirmar que a porcentagem da areia é ....

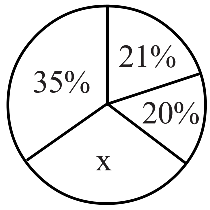
EXEMPLO 4

Qual o percentual do bolo que corresponde a x ?

Bolo 1



Bolo 2



Problemas a serem resolvidos mentalmente

São aqueles que envolvem 10%, 25%, 50%, etc...

Determine:
A) Os 10% de $\boxed{850}$ $\boxed{47}$ $\boxed{12,5}$(tira um zero ou corre a virgula e casa para a esquerda).
B) Os 50% de $\boxed{500}$ $\boxed{2}$(metade).
C) Os 25% de $\boxed{200}$ (quarta parte)
D) Os 5% de $\boxed{540}$ (calculamos os 10% e dividimos por 2)
E) Os 75% de $\boxed{240}$ (calculamos a 1/4 parte e multiplicamos por 3)

PORCENTAGEM QUALQUER

Fazemos uma **regra de três direta o**u passamos da forma fracionária para a forma decimal e daí para a porcentagem e vice-versa.

EXEMPLO 1

De 70 tiros dados por um caçador , 42 atingiram o alvo. Qual a porcentagem do acerto?

SOLUÇÃO:

$$\frac{42}{70} = 0,6 = 60\%$$

ou

70 ______ 100%
42 ______ x

EXEMPLO 2

Determinar 7% de 250.

250 ——— 100%
x ——— 7%

$$x = \frac{7 \times 250}{100} = 17,5$$

REGRA DO BALCONISTA

(Todo o bom vendedor SABE!)

É aquela que com uma única conta chega diretamente ao novo número.

ACRÉSCIMO (Direto)		
$\frac{100 + it}{100}$ it = percentagem de acréscimo ou desconto		
20% sobre X	100% sobre P	5% sobre X
$\frac{100 + 20}{100} = 1,2$	$\frac{100 + 100}{100} = 2$	$\frac{100 + 5}{100} = 1,05$
1,2 X	2 P	1,05 X
Número que multiplica X é maior que 1 = Acréscimo sobre X		

DESCONTO (Direto)	
$\frac{100 - it}{100}$ 10% sobre X $\frac{100 - 10}{100} = 0,9$	
Multiplicar por 0,9 equivale a um desconto de 10%	
40% sobre N	92% sobre K
$\frac{100 - 40}{100} = 0,6$	$\frac{100 - 92}{100} = 0,08$
0,6 N	0,08 K
Número que multiplica X é menor que 1 = Desconto sobre X	

Exemplo 1

Um círculo A tem área 1,25 vezes maior que um círculo B. Podemos dizer que o círculo A é 25% maior que o círculo B.

CUIDADO: **o círculo B não é 25% menor que o círculo A !**

Veja: A proporção é

$$\frac{\text{CÍRCULO A}}{\text{CÍRCULO B}} = \frac{125}{100} = 1,25$$

Círculo A é 1,25 vezes B, o acréscimo é de 25% sobre B ou 25% maior que B.

Mas $\frac{\text{CÍRCULO B}}{\text{CÍRCULO A}} = \frac{100}{125} = 0,8$

O círculo B é 0,8 vezes o círculo A. Portanto o tamanho do círculo B é o tamanho do círculo A **descontado de 20%**. B é 20% menor do que A.

Exemplo 2

Um preço P sofre um desconto de 22%. Podemos dizer que o novo preço é:

a) 78P
b) 122P
c) P - 22
d) 0,22P
e) 0,78P

Exemplo 3

Se um número x é multiplicado por 1,3 e um número y é multiplicado por 0,6 podemos afirmar que:

x sofreu um acréscimo de 30%
y sofreu um desconto de 40%
Confira pela Regra do Balconista.

Atenção

Acréscimo de 100% Þ o valor fica 2 vezes maior.

Acréscimo de 200% Þ o valor fica 3 vezes maior.

Acréscimo de 300% Þ o valor fica 4 vezes maior.

PORCENTAGEM

01. Identifique a porcentagem de acréscimo ou desconto sobre x:

a) 1,12.x = b) 0,74.x =
c) 1,08.x = d) 0,08.x =
e) 1,005.x = f) 0,85.x =
g) 1,4.x = h) 0,6.x =

02. 20% elevado ao quadrado é igual a:

a) 40% b) 400%
c) 4% d) 0,4%

03. Um quadrado de lado l, tem área **A**. Se aumentarmos de 20% o comprimento do lado l, sua área passará a ser:

a) 20A b) 1,2A c) 400A
d) 4A e) 1,44A

04. Um quadrado de lado l tem área A. Se aumentarmos 10% o comprimento de cada lado, a nova área aumentará:

a) 40% b) 20% c) 21%
d) 10% e) 100%

05. Qual o número que diminuído de seus 40% vale 720?

06. Qual a quantia que aumentada de 20% produz 480?

07. Aproveitando uma promoção que concedia 27% de desconto para o pagamento à vista de um produto, paguei $ 5986. Qual o preço original?

08. Sobre uma fatura de $ 5800, se concede o abatimento de $ 145. Qual a porcentagem do abatimento?

09. Uma fatura sofreu um abatimento de 5% e produziu o líquido de $ 25.555. De quanto era a fatura?

10. Em uma firma 25% são contratados e os 180 funcionários restantes são efetivos. Qual o total de funcionários da firma?

11. Misturam-se 30 litros de álcool com 20 litros de gasolina. Qual a porcentagem de gasolina na mistura?

12. De um total de 60 questões, Carlos acertou 42. Qual a porcentagem de erro?

13. Um operário A reboca $12m^2$ e seu serviço é 1/4 maior do que seu colega B. Quanto reboca B?

a) 16 m^2 b) 15 m^2 c) 8 m^2
d) 9 m^2 e) 9,6 m^2

14. Um operário A constrói 12 m^2 de muro e seu colega B constrói 1/4 a menos do que A. Quanto constrói B?

a) 3/4 m^2 b) 9 m^2 c) 8 m^2 d) 9,6 m^2

15. Se o salário de Pedro é 3/4 do salário de João, podemos afirmar que:

a) O salário de João é 25% maior que o de Pedro.
b) O salário de João é 75% maior que o de Pedro.
c) O salário de Pedro é 75% maior que o de João.
d) O salário de João é 33 $\frac{1}{3}$ % maior que o de Pedro.
e) O salário de João é 1/4 maior que o de Pedro.

16. Se a razão entre o valor **bruto** e **líquido** de certo salário é de 6/5. O valor descontado representa que fração do salário líquido?

a) 1/5 b) 1/6 c) 2/5 d) 2/6 e) 5/6

17. A razão entre o salário **líquido** e **bruto** do Dr. Carlos é 5/8. O valor descontado representa que fração do salário líquido?

a) 3/8 b) 1/4 c) 2/5 d) 3/5 e) 1/3

18. Três operários tem seus salários relacionados da seguinte forma:
A ganha 20% a mais que **B** e **C** ganha 30% a mais do que **A**. Se juntos ganham $ 13.912, o salário de **A**, **B** e **C** é respectivamente:

a) $3760 , $4512 , $5865,60
b) $4512 , $3760 , $5865,60
c) $3700 , $4440 , $5772
d) $4440 , $3700 , $5772
e) $3600 , $3000 , $4680

19. Quatro operários tem seus salários relacionados da seguinte forma: Carlos ganha 12% a mais que João. Antônio ganha 20% a mais que Carlos e Paulo ganha 10% a menos que Carlos. Se juntos ganham $ 22.360, qual o salário de cada um?

20. Ao afirmarmos que um produto A é 25% mais **caro** que um produto B, podemos afirmar:

a) B é 25% mais barato que A.
b) B é 1/4 mais barato que A.
c) A é 1/5 mais caro que B.
d) B é 20% mais barato que A.
e) A é 20% mais caro que B.

21. Uma mercadoria é majorada em 40%. Um cliente, alegando ter vindo no dia anterior, é beneficiado com um desconto de 30% sobre o novo preço. Então, em relação ao preço do dia anterior, o comerciante ainda obteve:
a) lucro de 10% b) prejuízo de 30%
c) lucro de 40% d) lucro de 8%
e) prejuízo de 2%

22. A razão entre o valor previsto e o valor arrecadado em um evento é 1,25. Podemos afirmar que:
a) A arrecadação ultrapassou a previsão e 25%.
b) A arrecadação ultrapassou a previsão e 2,5%.
c) A arrecadação foi 25% inferior a previsão.
d) A arrecadação foi 20% a menos que o previsto.
e) A arrecadação foi 0,25% menor que a previsão.

23. A razão entre **despesa** e **receita** de um evento é 0,8. Podemos afirmar que:
a) Houve lucro de 25% em relação à despesa.
b) Houve prejuízo de 20% em relação à receita.
c) Houve lucro de 20% em relação a despesa.
d) Houve prejuízo de 25% em relação a receita.
e) Houve lucro de 80%.

24. O salário de João é 40% do salário de Margarida. Podemos afirmar que:
a) O salário de Margarida é 60% maior que o de João.
b) O salário de Margarida é 2/3 maior que o de João.
c) O salário de Margarida é 150% maior que o de João.
d) O salário do João é 2/3 do salário de Margarida.
e) O salário de Margarida é 3/2 do salário de João.

25. A quanto correspondem 2 acréscimos sucessivos de 10% e 20%?

26. A quanto correspondem 2 descontos sucessivos de 20% e 30%?

27. Cristina comprou um produto e obteve desconto de 30%, pagando $ 588. Qual era o preço original?

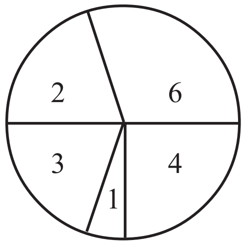
28. Teresa compra um produto ganhando um desconto de 20% e mais 5% sobre o preço já descontado. Se pagou $ 1216, qual o preço original?

29. Em abril, um produto custa X. Em maio sofre um acréscimo de 25%. No entanto, no "Dia das Mães", sofre uma promoção especial com desconto de 10%. Se uma pessoa paga no "Dia das Mães", $ 23.625, podemos afirmar que o preço em abril era de :
a) $ 19.490 d) $ 20.000
b) $ 20.790 e) $ 21.000
c) $ 17.180

30. Um preço é majorado de $ 1200 para $ 1416. Qual a porcentagem de acréscimo?

31. Uma mercadoria tem seu preço **P**, aumentado em 60%. Para que a mercadoria volte a custar **P**, deve-se descontar do novo preço:
a) 30% b) 37,5% c) 40%
d) 60% e) 62,5%

32. O disco abaixo está dividido em cinco setores circulares. Os números no interior dos setores indicam a medida da área em cm^2 de cada um deles.



Em relação à área total do disco, as áreas do maior e do menor setor circular correspon-dem, respectivamente a:
a) 60% e 10% b) 37,5% e 6,25%
c) 62,5% e 3,75% d) 60% e 6%
e) 66% e 10%

GABARITO

01. A) Acréscimo de 12%
B) Desconto de 26%
C) Acréscimo de 8%
D) Desconto de 92%
E) Acréscimo de 0,5%

02. C	**03.** E	**04.** C	**05.** 1200
06. 400	**07.** $ 8200	**08.** 2,5%	**09.** $ 26900
10. 240	**11.** 40%	**12.** 30%	**13.** E
14. B	**15.** D	**16.** A	**17.** D
18. D	**19.** João = $ 5000 Antonio = $ 6720	Carlos = $ 5600	Paulo = $ 5040
20. D	**21.** E	**22.** D	**23.** A
24. C	**25.** 32%	**26.** 44%	**27.** $ 840
28. $ 1600	**29.** E ($ 21000)		**30.** 18%
31. B	**32.** B		

LUCRO E PREJUÍZO

PV > PC

Lucro (Exemplo 20%)
1. LUCRO SOBRE O PREÇO DE CUSTO
PC = 100% PV = 120%
2. LUCRO SOBRE O PREÇO DE VENDA
PV = 100% PC = 80%

PV < PC

Prejuízo (Exemplo 15%)
1. PREJUÍZO SOBRE O PREÇO DE CUSTO
PC = 100% PV = 85%
2. PREJUÍZO SOBRE O PREÇO DE VENDA
PV = 100% PC = 115%

EXEMPLOS BÁSICOS

1A. Uma mercadoria foi vendida por $ 52, com lucro de 30%, sobre o PC. Qual o preço do custo?
1B. Uma mercadoria foi vendida com lucro de 20% sobre o PV. Se foi comprada por $ 40, qual o PV?
2A. Uma mercadoria foi vendida por $ 54, com prejuízo de 10% sobre o PC. Qual o PC?
2B. Uma mercadoria foi vendida com prejuízo de 20% sobre o PV. Se o PC é $ 60, qual o PV?

Problemas de Lucro, Prejuízo e Impostos

01. Uma mercadoria foi vendida por $432 com lucro de 20% sobre o preço de custo. Qual o preço de custo?

02. Uma mercadoria foi vendida com lucro de 30% sobre o preço de venda. Se foi comprada por $56, qual o PV?

03. Uma mercadoria foi vendido por $480 com o prejuízo de 25% sobre o PC. Qual o preço de custo?

04. Um produto foi vendo com prejuízo de 12% sobre o preço de venda. Se o PC é $1344, qual é o PV?

05. Um comerciante compra uma mercadoria por X. Se ele a vende com um lucro de 25% sobre o PC, podemos afirmar que o preço de venda é:

a) 25X
b) 125X
c) 0,25X
d) 1,25X
e) 2,5X

06. O preço de venda de uma mercadoria é PV. Porém na promoção, há um desconto de 15%. O comprador pagará:

a) 15PV
b) 1,15PV
c) 0,15PV
d) 85PV
e) 0,85PV

07. Uma mercadoria foi vendida por $ 83.776 com um lucro de 12% sobre o preço de custo. Qual o PC?

08. Uma mercadoria foi vendida com o prejuízo de 9% sobre o PV. Se o preço de custo é $4905, qual o PV?

09. Um produto foi vendido com lucro de 40% sobre o PV. Se foi comprado por $840, qual o preço de venda?

10. Um produto foi vendido por $ 68.875 com prejuízo de 5% sobre o PC. Qual o PC?

GABARITO

01. $ 360	**02.** $ 80	**03.** $ 640
04. $ 1200	**05.** D	**06.** E
07. $ 74800	**08.** $ 4500	**09.** $ 1400
10. $ 72500		

JUROS SIMPLES

Os Juros Simples se caracterizam por render sempre em cima do Capital Inicial.

Conceitos

M = C + J

$J = \dfrac{C \cdot i \cdot t}{100}$

$M - C = \dfrac{C \cdot i \cdot t}{100}$

M = C . (   )

ACRÉSCIMO de it% de acordo com o "**BALCONISTA**"

$\begin{cases} C \rightarrow 100\% \\ J \rightarrow \boldsymbol{it}\ \% \end{cases}$

As unidades do *it* devem estar padronizadas

PROBLEMAS PROPOSTOS EM AULA

01. Determine os juros e o montante de um capital de $ 2000 aplicado a uma taxa simples de 5% a.mês, durante 6 meses.

	CAPITAL	JUROS	MONTANTE
t = 0			
t = 1			
t = 2			
t = 3			
t = 4			
t = 5			
t = 6			

Comentários

02. Determine os juros e o montante de um capital de $ 120.000, aplicado a uma taxa simples de $^{13}/_{3}$% a.ano. durante $^{5}/_{8}$ ano.

03. Determine os juros e o montante de um capital de $ 72.000 aplicado a uma taxa simples de 5% a.ano durante 100 dias.

04. Determine o capital que aplicado a uma taxa simples de 6% a.mês, durante 9 meses, atinge o montante de $ 12705.

05. Um capital de $ 60.000 é aplicado em um Banco A, durante 4 meses a juros simples de 5% a.mês. Após esse tempo, pega-se o MONTANTE e aplica-se em um Banco B a juros simples de 6% a.mês durante 5 meses.
Determine:
A) Montante
B) Qual deveria ser a taxa paga pelo Banco A para que o capital atingisse o mesmo montante final, aplicado os 9 meses a juros simples no Banco A?

Gabarito

M = 93600 e i = 6,22%a.m

PROBLEMAS DE JUROS

01. Determine os juros e o montante de um capital de $8000 aplicado sob forma de juros simples a um taxa de 6% ao mês, durante 4 meses:

02. Determine o capital que aplicado a 4,5% a.a. rende em 6 meses $5400 de juros.

03. Qual a taxa de aplicação a juros simples de um capital de $12000 que em 5 meses rendeu $2100 de juros?

04. Achar o tempo que permaneceu aplicado um capital de $15000, sabendo que rendeu $3000 de juros a uma taxa de 6% ao mês.

(A) 3 meses e 10 dias (B) 3 meses e 3 dias
(C) 20 meses (D) 2 meses
(E) 3,2 meses

05. Qual o capital que aplicado a 5% a.a. durante 6 meses, produz o montante de $6970?

06. Qual o capital que aplicado a taxa de 7% ao mês produz o montante de $5070 em 8 meses de juros simples?

07. Determine o capital que aplicado a taxa de 7% a.a. produz o montante de $3070 após 4 meses:

08. Determine o montante produzido por um capital de $5000 aplicado a 8% a.a. durante 3 meses.

09. Qual o capital que aplicado a 10% a.a. durante 2 anos produz o montante de $3096?

10. Qual a taxa de aplicação de um de um capital de $36000 que rende $1620, em 18 meses?

11. O capital que investido hoje a juros simples de 12% a.a., se elevará a $1296 no fim de 8 meses, é de:

(A) $ 1100 (B) $1000 (C) $1392
(D) $1200 (E) $1399,68

12. Quanto se deve aplicar a 12% ao mês para que obtenha os mesmos juros simples que os produzidos por $400 000 emprestados a 15% ao mês, durante o mesmo período?

(A) $420 000 (B) $450 000 (C) $480 000
(D) $520 000 (E) $500 000

13. Um capital C foi aplicado a 5% a.a. durante 4 anos. Qual a taxa que deve ter um capital de 2C para render os mesmos juros simples em 6 anos e 3 meses?

14. Dispomos de um capital de %500000 aplicados a uma taxa de 20% ao mês sob a forma de juros simples. Imaginemos 3 situações independentes:

(A) Após **n** meses o titular da conta retirou a quantia de (**n** x $120000) e observou que o saldo que ficou atingiu a 80% do capital inicial. Podemos afirmar que o valor de **n** é:

(B) Após **k** meses o titular retirou (**k** x $80000) e verificou que o saldo deixado atingiu a 120% do capital inicial. Qual o valor de **k**?

(C) Após **m** meses o titular retirou (**m** x $40000) e verificou que o saldo que ficou atingiu 220% do capital inicial. Calcule **m**?

15. Em quanto tempo um capital aplicado a taxa de 1,25% ao mês rende 3/8 de si mesmo?

16. Há 4 anos atrás, um capital de $200000 foi aplicado a taxa de 20%a.a. Se aplicarmos hoje um capital de $240000 à taxa de 25% a.a. após quantos anos, a contar de agora, os dois capitais terão produzido juros iguais? E após quantos anos os dois montantes serão iguais?

17. Um capital é aplicado a juros simples. Esse capital, com juros correspondentes a 3 meses eleva-se ao montante de $ 24.780. O mesmo capital com juros correspondentes a 7 meses eleva-se a $ 29.820. Determine o capital e a taxa anual.

18. Um capital de $50000 é aplicado a uma taxa de 10% ao mês durante 3 meses. Então, retira-se tudo e reaplica-se o montante em outro banco a uma taxa de 12% ao mês durante 4 meses. Qual o montante no final da operação? De quanto deveria ser a taxa para que o capital atingisse o mesmo montante rendendo juros simples durante os 7 meses no mesmo banco?

19. Um certo capital foi aplicado a juros simples. Depois de 10 meses, o extrato de conta revela um montante X. 6 meses depois de observar o extrato pela primeira vez, tira-se novo extrato e verifica-se que o montante aumentou 10% em relação ao primeiro extrato. Se o segundo extrato, após 16 meses do depósito inicial, revela um montante de $66000, determine:

(A) o montante X:

(B) o capital inicial:

(C) a taxa de aplicação:

20. Um certo capital é aplicado a uma taxa de 5% ao mês durante 6 meses, rendendo juros simples. Então, retira-se tudo e aplica-se todo o montante em outro banco a uma taxa de 6% ao mês durante 6 meses. Se, no final desses 12 meses o montante obtido foi de $76908, determine o capital inicial.

21. Um certo capital é aplicado a uma taxa de juros simples de 8% a.a. durante 3 anos. Depois disso pega-se o capital e os juros e aplica-se tudo em outro banco durante 2 anos a uma taxa simples de 12,5% a.a. Se no final dos 5 anos o montante ascende a $31000, determine:

(A) o capital inicial:

(B) qual teria sido a taxa de juros simples para que esse mesmo capital rendesse a mesma coisa nesses 5 anos estando sempre no mesmo banco?

22. Um capital é aplicado durante 6 meses a uma taxa de 10% a.m. e a partir daí recebe 20% ao mês durante 2 meses, sobre o mesmo capital inicial. A taxa média mensal de aplicação durante os 8 meses é de:

(A) 15% (B) 12,5% (C) 10%
(D) 15,5% (E) 16%

23. (TTN/85) Um capital de Cr$ 14.400 aplicado a 22% ao ano rendeu CR$ 880 de juros. Durante quanto tempo esteve empregado?

(A) 3 meses e 3 dias (B) 3 meses e 8 dias
(C) 2 meses e 28 dias (D) 3 meses e 10 dias
(E) 27 dias

24. (TTN/92) Quanto de deve aplicar a 12% ao mês, para que se obtenha os mesmos juros simples que os produzidos por Cr$ 400.000,00 emprestados a 15% ao mês, durante o mesmo período?

(A) Cr$ 420.000,00 (B) Cr$ 450.000,00
(C) Cr$ 480.000,00 (D) Cr$ 520.000,00
(E) Cr$ 500.000,00

25. (TTN/92) Três capitais são colocados a juros simples: o primeiro a 25%a.a., durante 4 anos; o segundo a 24%a.a., durante 3 anos e 6 meses e o terceiro a 20%a.a., durante 2 anos e 4 meses. Juntos renderam um juro de Cr$ 27.591,80. Sabendo que o segundo capital é o dobro do primeiro e que o terceiro é o triplo do segundo, o valor do terceiro capital é de:

(A) Cr$ 30.210,00 (B) Cr$ 10.070,00
(C) Cr$ 15.105,00 (D) Cr$ 20.140,00
(E) Cr$ 5.035,00

26. (TTN/94) Mário aplicou suas economias, a juros simples comerciais, em um banco, a juros de 15% ao ano, durante 2 anos. Findo o prazo reaplicou o montante e mais R$ 2.000,00 de suas novas economias, por mais 4 anos, à taxa de 20% ao ano, sob mesmo regime de capitalização. Admitindo-se que os juros das 3 aplicações somaram R$ 18.216,00, o capital inicial da primeira aplicação era de R$?

(A) 11.200,00 (B) 13.200,00 (C) 13.500,00
(D) 12.700,00 (E) 12.400,00

27. (AFTN/85) João colocou metade de seu capital a juros simples pelo prazo de 6 meses e o restante, nas mesmas condições, pelo período de 4 meses. Sabendo-se que, ao final das aplicações, os montantes eram de Cr$ 147.000 e Cr$ 108.000, respectivamente, o capital inicial do capitalista era de:

(A) Cr$ 50.000 (B) Cr$ 60.000
(C) Cr$ 70.000 (D) Cr$ 80.000
(E) Cr$ 200.000

28. Um capital de $200.000 é aplicado durante certo tempo a juros simples de 4% a.mês. Após esse tempo o capital passa a ser remunerado a uma taxa simples de 5% a.mês, durante 5 meses. No fim desse tempo o montante atinge $298.000. Quanto tempo o capital esteve aplicado?

A) 10 meses B) 9 meses e 24 dias
C)11 meses D) 6 meses
E)4 meses e 24 dias

Gabarito

01. J = 1.920 M = 9.920 **02.** $240.000
03. 3,5% ao mês **04.** A **05.** $6.800
06. $3.250 **07.** $ 3.000 **08.** $5.100
09. $2.580 **10.** 0,25% ao mês
11. D **12.** E **13.** 1,6% a.a.
14. A) n=5 meses B) k=5 meses C) m=10 meses
15. 30 meses
16. Juros iguais em 8 anos;
Montantes= em 6 anos
17. C = 21.000 i = 6% a.mês

18. M = 96.200 i = 13,2% a.m.
19. A) M X = 60.000 B) C = 50.000
C) i = 2% a.mês

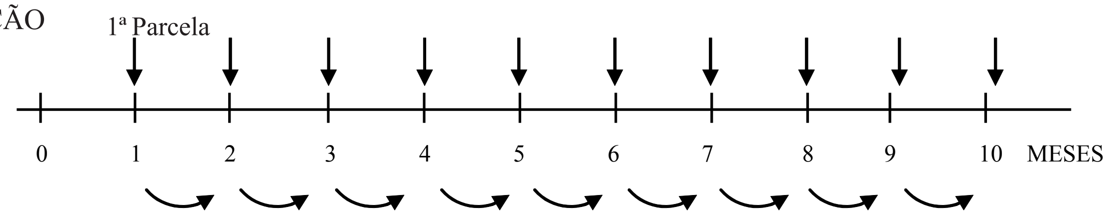
20. $43.500
21. A) C = 20.000 B) i = 11%a.a.
22. B **23.** D **24.** E **25.** A
26. E **27.** B **28.** C

SÉRIE DE CAPITAIS A JUROS SIMPLES

1 Uma pessoa tem que pagar 10 parcelas no valor de $1.000 cada uma e que vencem todos os dias cinco dos próximos 10 meses.Todavia, ela combina com o credor um pagamento único equivalente, no dia 5 do décimo mês e assim quitar a dívida.Calcule este pagamento considerando juros simples de 4% a.mês.

A) 11800
B)12006
C)12200
D) 12800
E)13486

SOLUÇÃO



A 1ª parcela atrasou 9 meses. Sobre ela incidirá 36% de juros (9meses de 4% a juros simples).

Seu valor será $\boxed{1000 \,.\, 1{,}36}$

A 2ª parcela atrasou 8 meses. Seu valor será $\boxed{1000 \,.\, 1{,}32}$

A 3ª parcela pagará 7 meses de juros a 4% a.mês. $\boxed{1000 \,.\, 1{,}28}$

E assim sucessivamente.
A 10ª parcela será paga na data combinada. Portanto não terá incidência de juros.

Seu valor será de $\boxed{1000}$

Assim, pagando na data 10 temos:

$$\underbrace{\boxed{1000}}_{(10^a\text{ parcela})} + \underbrace{\boxed{1000 \,.\, 1{,}04}}_{(9^a\text{ parcela})} + \underbrace{\boxed{1000 \,.\, 1{,}08}}_{(8^a\text{ parcela})} + \underbrace{\boxed{1000 \,.\, 1{,}12}}_{(7^a\text{ parcela})} + \underbrace{\boxed{1000 \,.\, 1{,}16}}_{(6^a\text{ parcela})} +$$

$$\underbrace{\boxed{1000 \,.\, 1{,}20}}_{(5^a\text{ parcela})} + \underbrace{\boxed{1000 \,.\, 1{,}24}}_{(4^a\text{ parcela})} + \underbrace{\boxed{1000 \,.\, 1{,}28}}_{(3^a\text{ parcela})} + \underbrace{\boxed{1000 \,.\, 1{,}32}}_{(2^a\text{ parcela})} + \underbrace{\boxed{1000 \,.\, 1{,}36}}_{(1^a\text{ parcela})}$$

Ora, estamos diante de uma **PA**

$$\underbrace{\boxed{1000}}_{a_1} + \underbrace{\boxed{1000 \,.\, 1{,}04}}_{a_2} + \underbrace{\boxed{1000 \,.\, 1{,}08}}_{a_3} + \underbrace{\boxed{1000 \,.\, 1{,}12}}_{a_4} + \underbrace{\boxed{1000 \,.\, 1{,}16}}_{a_5} +$$

$$\underbrace{\boxed{1000 \,.\, 1{,}20}}_{a_6} + \underbrace{\boxed{1000 \,.\, 1{,}24}}_{a_7} + \underbrace{\boxed{1000 \,.\, 1{,}28}}_{a_8} + \underbrace{\boxed{1000 \,.\, 1{,}32}}_{a_9} + \underbrace{\boxed{1000 \,.\, 1{,}36}}_{a_{10}} = \underbrace{\boxed{\text{TOTAL PAGO NA DATA}}}_{\text{SN}}$$

A fórmula da SOMA DOS TERMOS da PA é:

$$SN = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) . N$$

$$SN = \left(\frac{1000 + 1360}{2}\right) . 10$$

$$SN = 11800$$

Mas podemos resolver fazendo o **ACRÉSCIMO MÉDIO**

$$\textbf{ACRÉSCIMO MÉDIO} = \frac{\textbf{ACRÉSCIMO MÁXIMO}}{\textbf{2}}$$

$$\text{ACRÉSCIMO MÉDIO} = \frac{4\% \cdot 9}{2}$$

$$\text{ACRÉSCIMO MÉDIO} = 18\%$$

Assim a soma das 10 parcelas de $ 1000 terá um acréscimo médio de 18%

$$10.000 \cdot 1.18 = \$\ 11.800$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

02. Uma pessoa faz 9 depósitos mensais de $4000. O banco paga juros simples de 5% a.mês. O valor acumulado imediatamente após o 9º depósito é de:

03. Quanto devemos depositar mensalmente para que imediatamente após 6 depósitos mensais e iguais em um aplicação que paga juros simples de 3%a.mês, se obtenha um montante de $ 64.500

Gabarito

01. 11.800   02. 43.200   03. 10.000

JUROS COMPOSTOS

São ACRÉSCIMOS SUCESSIVOS.
Os rendimentos ou JUROS são calculados sobre o MONTANTE obtido no final de cada PERÍODO.

CONCEITOS

PRAZO DE APLICAÇÃO — É o tempo total que o CAPITAL fica aplicado.

PERÍODO DE CAPITALIZAÇÃO — É o tempo no qual o CAPITAL fica aplicado como se fosse JUROS SIMPLES.

Ao finalizar esse PERÍODO, o montante obtido serve como REFERÊNCIA para o cálculo dos juros no próximo período. Sendo essa REFERÊNCIA constante durante todo o período considerado, podemos dizer que em CADA PERÍODO o capital rende JUROS SIMPLES. Os juros compostos se caracterizam justamente pela TROCA DESSE REFERÊNCIAL a cada NOVO PERÍODO.

Portanto, os **JUROS COMPOSTOS** são uma **SUCESSÃO** de **JUROS SIMPLES**. Quando o **PERÍODO** de **CAPITALIZAÇÃO** tende a **ZERO,** a **CAPITALIZAÇÃO** é chamada **INSTANTÂNEA** e o **MONTANTE** é calculado pela expressão

$$\boxed{M = C \cdot e^{it}}$$

e = número de Euler = 2,7182...

RESUMO

$$\boxed{M = C \cdot (\quad)^N}$$

Acréscimo (na forma do "BALCONISTA") ocorrido em 1 PERÍODO DE CAPITALIZAÇÃO como se fosse JUROS SIMPLES.

$$N = \frac{\textbf{PRAZO DE APLICAÇÃO}}{\textbf{PERÍODO DE CAPITALIZAÇÃO}}$$

Ambos na mesma Unidade

Exemplo:

Seja um capital de $ 100.000, aplicado a uma TAXA NOMINAL de 60% a.ano. pelo prazo de 1 ano.

CAPITALIZAÇÃO MENSAL	CAPITALIZAÇÃO BIMESTRAL

CAPITALIZAÇÃO TRIMESTRAL	CAPITALIZAÇÃO QUADRIMESTRAL	CAPITALIZAÇÃO SEMESTRAL

TAXA NOMINAL

É a taxa que é usada como **REFERÊNCIA.** Ela aceita **"PROPORCIONALIDADE"**.

TAXA EFETIVA

No momento em que "muda o referencial" para cálculo de juros, a taxa passa a ser **EFETIVA,** pois significa que ocorreu uma **CAPITALIZAÇÃO** (acréscimos sucessivos).

CONCLUSÕES

PARA UMA MESMA TAXA NOMINAL e
MESMO PRAZO DE APLICAÇÃO é correto afirmar:

1° Quanto maior o número de capitalizações, maior é a taxa efetiva.

2º Quanto maior a **FREQUÊNCIA** das capitalizações, maior é a taxa efetiva.

3º Quanto maior o **PERÍODO** das **CAPITALIZAÇÕES** **MENOR** é a taxa efetiva.

4º Quanto maior a **PERIODICIDADE** das **CAPITALIZAÇÕES**, maior é a taxa efetiva.

PROBLEMAS DE JUROS COMPOSTOS

01. Um capital de $200.000 é aplicado a uma taxa de 2% ao mês da seguinte forma:
(A) capitalização mensal durante 3 meses
(B) capitalização bimestral durante 8 meses
(C) capitalização quadrimestral durante 1 ano
(D) capitalização semestral durante 3 anos
Determine o MONTANTE no final de cada aplicação e os respectivos JUROS:

02. Um capital de $60.000 é aplicado a uma taxa de 20% a. m. das seguintes formas:
(A) capitalização mensal durante 2 meses
(B) capitalização trimestral durante 1 semestre
Determine o montante no final de cada aplicação:

03. Qual o capital que aplicado a uma taxa de 40% a.a. durante 18 meses, com capitalização semestral, atinge o montante de $51.840?

04. Quanto tempo permaneceu aplicado um capital de $25.000 a taxa de 2% a.m. com capitalização quadrimestral para ter atingido o montante de $29.160? **Obs.:** Como não há tabela financeira, faça teste das opções.

05. Qual a taxa de aplicação de um capital de $50.000 que foi aplicado durante 8 meses com capitalização quadrimestral e atingiu o montante de $72.000?

06. Qual o tempo que esteve aplicado um capital de $12.000 aplicado a 50% a. m., com capitalização bimestral sabendo-se que atinge o montante de $96.000?

07. Qual o número de anos necessários para que um capital colocado a juros compostos à taxa de 50% a.a. atinja 225% de seu valor inicial?

08. Qual o tempo necessário para que um capital colocado a juros compostos de 100% a.a. sofra um acréscimo de 700%? (Capitalização anual)

09. Um capital de $2.000 é aplicado a uma taxa de 50% a. m. durante certo tempo e atinge o montante de $162.000. Sabendo-se que a capitalização é quadrimestral, determine o tempo da aplicação.

10. Qual a taxa de aplicação de um capital de $3.000 que aplicado durante 18 meses com capitalização semestral, atinge o montante de $81.000?

Gabarito

01.	MONTANTE	02.	A) $86.400	06.	6 meses
	A) $212.241,60		B) 153.600	07.	2 anos
	B) $233.971,71	03.	C = $30.000	08.	3 anos
	C) $251.942,40	04.	8 meses	09.	16 meses
	D) $394.764,54	05.	5% ao mês	10.	400% a.a. (nominal)
					800% a.a. (efetiva)

TAXA EFETIVA

$(\quad)^N$ = TAXA EFETIVA

Na forma de **ACRÉSCIMO** do "BALCONISTA"

A taxa **EFETIVA** é aquela que resulta de **CAPITALIZAÇÕES SUCESSIVAS**

NÃO ACEITA PROPORCIONALIDADE

CRESCE EXPONENCIALMENTE

Exemplo

Determine a taxa nominal anual correspondente a uma taxa efetiva de 44% a.semestre com capitalização TRIMESTRAL

SOLUÇÃO

Em um semestre há 2 capitalizações trimestrais.

Portanto $(x)^2 = 1{,}44$

$x = \sqrt{1{,}44}$

$\boxed{x = 1{,}2}$ ← ***Interpretação 20% ao trimestre***

Ora, a taxa encontrada no parênteses (***sem estar exponencializado***) é uma taxa nominal. Isto significa que aceita **PROPORCIONALIDADE**.

Assim, 20% ao trimestre
↓
40% ao semestre (nominal)
↓
80% ao ano (nominal)

OBS: A taxa ***EFETIVA ANUAL*** seria

$(1{,}44)^2$ ou $(1{,}2)^4$

4 capitalizações trimestrais

2 capitalizações efetivas semestrais

$(1{,}2)^4 = 2{,}0736$ ou $(1{,}44)^2 = 2{,}0736$

INTERPRETAÇÃO

2,0736C → TRADUÇÃO: 207,36% do CAPITAL

CONCLUSÃO: TAXA EFETIVA 107,36% em 1 ano

O DINHEIRO "CRESCEU" 107,36% em 1 ano!

PROBLEMAS PROPOSTOS

01. Determine a taxa nominal anual correspondente a uma taxa efetiva de 46,41%a.ano, com capitalização TRIMESTRAL

02. Determine a taxa nominal anual correspondente a uma taxa efetiva de 10,25% ao quadrimestre com capitalização bimestral.
Calcule também a taxa EFETIVA anual.

03. Determine a taxa nominal anual correspondente a uma taxa efetiva de 60%a.a. com CAPITALIZAÇÃO MENSAL. Considere $\sqrt[12]{1,6} = 1,04$

04. Determine a taxa nominal anual correspondente a uma taxa efetiva de 200% em 9 meses, com capitalização mensal.
Considere $3^{1/9} = 1,13$

Gabarito

01. 40%a.a(nominal)

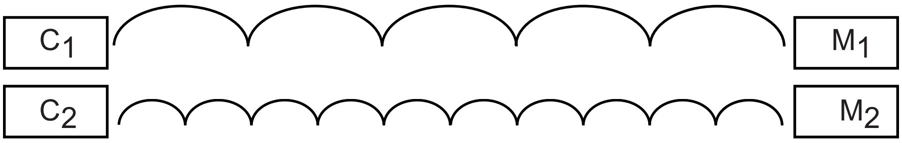
02. taxa nominal anual = 30%a.a
taxa efetiva anual = 34%a.a

03. 48% a.a nominal

04. 156% a.a nominal
taxa efetiva anual = 333,45%a.a

TAXAS EQUIVALENTES

São aquelas que "***POR CAMINHOS DIFERENTES***" produzem **CRESCIMENTOS EFETIVOS IGUAIS**, em **PRAZOS IGUAIS**, para qualquer capital.



Lembre que:

$$\mathbf{M = C\ .\ (\ \ )^N} \rightarrow \mathbf{(\ \ )^N = \frac{M}{C}}$$

E que $(\ \ )^N$ = **TAXA EFETIVA**

Então $\frac{M}{C}$ = **TAXA EFETIVA**

Na forma de ***ACRÉSCIMO*** do "Balconista".

Portanto as taxas são equivalentes se, para **PRAZOS IGUAIS**, temos:

$$\boxed{(X_1)^{N1} = (X_2)^{N2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{M_1}{C_1} = \frac{M_2}{C_2}}$$

Exemplo

Considere 2 capitais aplicados a prazos iguais.

10.000		16.000
CAPITAL	"***p***" acréscimos sucessivos	MONTANTE
25.000		40.000
CAPITAL	"***q***" acréscimos sucessivos	MONTANTE

Conclusão:

OBS: É evidente que, capitais iguais, aplicados no mesmo prazo, que chegarem ao **MESMO MONTANTE**, tem **MESMO CRESCIMENTO EFETIVO**.

EQUIVALÊNCIA ENTRE TAXAS NOMINAIS

Só serão equivalentes quando $(X_1)^{N1} = (X_2)^{N2}$ para mesmos prazos de aplicação.

Uma taxa nominal de 42% a.ano com capitalização semestral, em 1 ano de aplicação, é EQUIVALENTE a uma taxa nominal anual de 40%a.ano com capitalização trimestral NO MESMO PRAZO.

SOLUÇÃO

$$\underbrace{(1{,}21)^2}_{\substack{1{,}4641\\ \text{EFETIVO}}} = \underbrace{(1{,}1)^4}_{\substack{1{,}4641\\ \text{EFETIVO}}}$$

As taxas **EFETIVAS** são iguais no prazo dado.

PROBLEMA PROPOSTO

Determine a taxa nominal MENSAL que para aplicações pelo prazo de 9 meses e capitalização mensal é EQUIVALENTE a uma taxa nominal de 52% a.semestre com capitalização trimestral em 9 meses.

Dados: Considere $(1{,}26)^3 = 2$ e $\sqrt[9]{2} = 1{,}08$

Gabarito: 8%a.mês. Crescimento efetivo em 9 meses: 100%

EQUIVALÊNCIA ENTRE TAXAS EFETIVAS

Quando falamos de **TAXAS EFETIVAS** não é necessário deixar explícito o **PRAZO DE APLICAÇÃO**. O importante é que se diga simplesmente que é no **MESMO PRAZO**, *qualquer que ele seja*.

No entanto, basta comparar ambas as taxas no prazo indicado pela **TAXA** que tenha o **MAIOR PERÍODO DE CAPITALIZAÇÃO**.

Exemplo

Uma taxa efetiva de 4%a.mês é EQUIVALENTE a uma taxa efetiva de 60%a.ano

SOLUÇÃO

$\boxed{(1{,}04)^{12} \cong 1{,}6}$ prazo de 1 ano.

Mas elas também são equivalentes em outros P**RAZOS**. Tomemos, por exemplo, o prazo de **1 SEMESTRE**.

Uma taxa efetiva de 4%a.mês, rende em 6 meses

$(1{,}04)^6 = 1{,}2653$ **_Aproximadamente 26,5% ao semestre efetivo_**

Já uma taxa **EFETIVA** de 60%a.ano, cresce em 1 semestre o seguinte:

*Em 1 ano há **2** semestres*

$(x)^2 = 1{,}6$

$x = \sqrt{1{,}6}$

$x \cong 1{,}2649$

CONCLUSÃO: ***Aproximadamente 26.5% ao semestre***

PROBLEMAS PROPOSTOS

01. Determine a taxa mensal EQUIVALENTE a 12%a.ano

02. Determine a taxa efetiva mensal equivalente a 0,194% ao dia.

03. Qual a taxa diária equivalente a 3%a.mês? Considere $(1{,}03)^{1/30} = 1{,}000986$

OBS: considerar também mês com 22 dias úteis. Nesse caso , 1,03 elevado na 1/22 é 1,001344

04. Qual a taxa diária equivalente a 12%a.ano. Considere $(1{,}12)^{1/360} = 1{,}0003$

CONSIDERAR TAMBÉM ANO COM 252 DIAS ÚTEIS. CONSIDERAR 1,12 elevado na 1/252 = 1,0004498

05. A taxa de 18%a.ano equivale em 120 dias a:

SOLUÇÃO

$\left(\sqrt[360]{1{,}18}\right)^{120} \rightarrow \left[(1{,}18)^{1/360}\right]^{120}$

$(1{,}18)^{120/360}$ ***ou*** $\sqrt[360]{(1{,}18)^{120}} \rightarrow 1{,}05672$

Interpretação:

5,67% em 120 dias

06. Determine a taxa para 576 dias equivalente a 5%a.mês.

Gabarito

01. 0,948%a.mês	02. 5,99%a.mês	03. 0,0986%a.dia
04. 0,03%a.dia	05. 5,67% em 120 dias	06. 155,17%

TAXA REAL E APARENTE

Aumento Nominal

$$\frac{100 + X}{100 + Y} = \text{GANHO REAL}$$

Na forma do "BALCONISTA".

Aumento da inflação

ou

ACRÉSCIMO NOMINAL

$$\frac{X}{Y} = \text{GANHO REAL}$$

AUMENTO DA INFLAÇÃO

Todas as informações devem estar como **ACRÉSCIMO** do "**BALCONISTA**".

Exemplo

Considere a questão do (Banco Central/94 – superior).
Um investimento rendeu 68% em um mês no qual a inflação foi de 40%. O ganho real neste mês foi de:

A) 20%
B) 22%
C) 24%
D) 26%
E) 28%

PROBLEMAS PROPOSTOS

01. (CEB-Contador-Superior-IDR-94)
Se uma aplicação rendeu 38% em um mês, e nesse período, a inflação foi de 20%, a taxa real de juros foi de:

A) 14%
B) 15%
C) 16%
D) 17%
E) 18%

02. Um capital foi aplicado a 5%a.mês, a juros compostos, durante 3 meses. Nesse período a inflação foi de 2%a.mês.

A) 12%
B) 9,08%
C) 8,44%
D) 11.5%
E) 10%

03. (TCU) Uma financeira pretende ganhar 12%a.ano de juros reais em cada financiamento. Supondo que a inflação anual seja de 2300%, a financeira, a título de taxa de juros nominal anual, deverá cobrar:

A) 2358%
B) 2858%
C) 2888%
D) 2588%
E) 2688%

04. (CESPE/UnB-TCDF/FCE/95) - A renda nacional de um país cresceu 110% em um ano, em termos nominais. Nesse mesmo período, a taxa de inflação foi de 100%. O crescimento da renda real foi então de:

a) 5%
b) 10%
c) 15%
d) 105%
e) 110%

05. (AFTN) Um capital de $100.000 foi depositado por um prazo de 4 trimestres a taxa de juros de 10% ao trimestre, com correção monetária trimestral igual a inflação. Admitamos que as a taxas de inflação trimestrais observadas foram de 10%, 15%, 20% e 25% respectivamente. A disponibilidade do depositante ao final do terceiro trimestre é de aproximadamente:

A) $ 123065
B) $ 153065
C) $ 202050
D) $ 212045
E) $ 202045

Gabarito

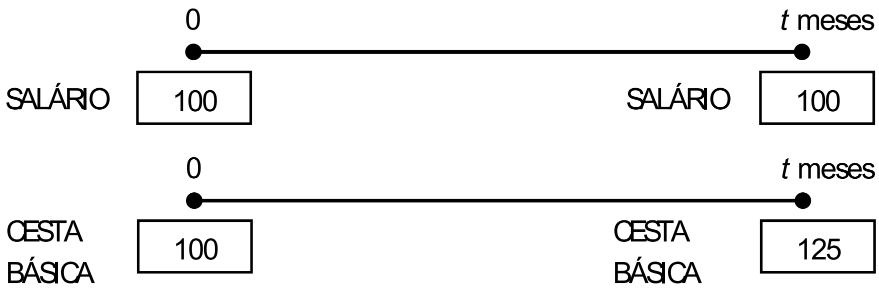
01. B
02. B
03. D
04. A
05. E

PERDA SALARIAL

O aumento nominal de um salário foi de 20% enquanto, no mesmo período, a inflação foi de 50%. Qual a perda salarial?

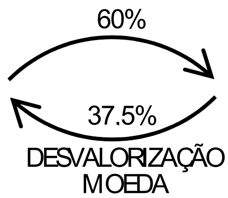
INFLAÇÃO x DESVALORIZAÇÃO DA MOEDA

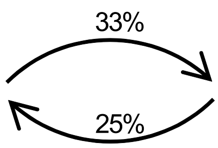
Consideremos uma inflação de 25% em *t* meses



Qual a DESVALORIZAÇÃO da moeda?

PRINCIPAIS CASOS





Testes

01. (CEB-Contador- Superior-IDR-94) - A aplicação de R$ 5.000,00 a taxa de juros compostos de 20% a.m. irá gerar, após 4 meses, o montante de:

a) R$ 10.358,00
b) R$ 10.368,00
c) R$ 10.378,00
d) R$ 10.388,00

02. (Metro-Técnico em Contabilidade -2°G -IDR-94) - Um investidor aplicou a quantia de R$ 20.000,00 a taxa de juros compostos de 10% a.m. Que montante este capital ire gerar após 3 meses?

a) R$ 26.420,00
b) R$ 26.520,00
c) R$ 26.620,00
d) R$ 26.720,00

03. (Metro-Assistente Administrativo- 2°G- IDR94) - Um capital de US$ 2.000,00, aplicado a taxa racional composta de 5% a.m., em 1 ano produz um montante de quantos dólares? Dado: $(1{,}05)^{12}=$ 1,79586.

a) US$ 3.291,72
b) US$ 3.391,72
c) US$ 3.491,72
d) US$ 3.591,72

04. (ESAF) - A aplicação de um capital de Cz$ 10.000,00, no regime de juros compostos, pelo período de três meses, a uma taxa de 10% ao mês, resulta, no final do terceiro mês, num montante acumulado:

a) de Cz$ 3.000,00;
b) de Cz$ 13.000,00;
c) inferior a Cz$ 13.000,00;
d) superior a Cz$ 13.000,00;
e) menor do que aquele que seria obtido pelo regime de juros simples.

05. (ESAF) - Se um capital cresce sucessiva e cumulativamente durante 3 anos, na base de 10% ao ano, seu montante final e:

a) 30% superior ao capital inicial;
b) 130% do valor do capital inicial;
c) aproximadamente 150% do capital inicial;
d) aproximadamente 133% do capital inicial.

06. (TCDF-Analista de Finanças e Controle Externo-Superior-IDR/94) - Um investidor aplicou a quantia de CR$ 100.000,00 a taxa de juros compostos de 10% a.m. Que montante este capital ire gerar após 4 meses?

a) CR$ 140.410,00
b) CR$ 142.410,00
c) CR$ 144.410,00
d) CR$ 146.410,00

07. (CEB-Contador- Superior-IDR-94) - A caderneta de poupança remunera seus aplicadores a taxa nominal de 6% a.a., capitalizada mensalmente no regime de juros compostos. Qual e o valor do juro obtido pelo capital de R$ 80.000,00 durante 2 meses?

a) R$ 801,00
b) R$ 802,00
c) R$ 803,00
d) R$ 804,00

08. (TCDF-Analista de Finanças e Controle Externo-Superior-IDR/94) - No Brasil, as cadernetas de poupança pagam, alem da correção monetária, juros compostos a taxa nominal de 6% a.a., com capitalização mensal. A taxa efetiva bimestral e então de:

a) 1,00025% a.b.
b) 1,0025 % a.b.
c) 1,025% a.b.
d) 1,25 % a.b.

09. (Banco Central/94-Superior) - A taxa de 30% ao trimestre, com capitalização mensal, corresponde a uma taxa efetiva bimestral de:

a) 20%
b) 21 %
c) 22%
d) 23%
e) 24%

10. (ESAF) - Se, para um mesmo capital, aplicado durante qualquer período de tempo maior do que zero e a uma certa taxa, chamarmos:

M 1 -Montante calculado no regime de juros simples;
M2 - Montante calculado no regime de juros compostos pela convenção exponencial;
M3 -Montante calculado no regime de juros compostos pela convenção linear.

Teremos:
a) M3 > M1 para qualquer t > 0;
b) M3 = M1 para qualquer 0 < t < 1;
c) M3 < M2 para qualquer t > 0, desde que não seja inteiro;
d) M3 < M2 quando *t* é inteiro;
e)M2 > M1 para qualquer t > 0.

11. (AFTN/85) - Uma pessoa aplicou Cr$ 10.000 a juros compostos de 15% a.a., pelo prazo de 3 anos e 8 meses. Admitindo-se a convenção linear, o montante da aplicação ao final do prazo era de: Obs.: $(1{,}15)^3 = 1{,}5209$

a) Cr$ 16.590
d) Cr$ 16.705
b) Cr$ 16.602
e) Cr$ .16.730
c) Cr$ 16.698

12. (AFTN/91) - Uma aplicação e realizada no dia primeiro de um mês, rendendo uma taxa de 1 % ao dia útil, com capitalização diária. Considerando que o referido mês possui 18 dias úteis, no fim do mês o montante será o capital inicial aplicado mais:

a) 20,324% d) 18,174%
b) 19,6147% e) 18%
c) 19,196%

13. (AFC-ESAF/93) - Um título de valor inicial CR$ 1.000,00 vencível em um ano com capitalização mensal a uma taxa de juros de 10% ao mês, devera ser resgatado um mês antes do seu vencimento. Qual o desconto comercial simples a mesma taxa de 10% ao mês?

a) CR$ 313,84
b) CR$ 285,31
c) CR$ 281,26
d) CR$ 259,37
e) CR$ 251,81

14. (AFC-TCU/92) - Um certo tipo de aplicação duplica o valor da aplicação a cada dois meses. Essa aplicação renderá 700% de juros em:

a) 5 meses e meio; d) 5 meses;
b) 6 meses; e) 3 meses.
c) 3 meses e meio;

15. (AFTN/96) - A taxa de 40% ao bimestre, com capitalização mensal, é equivalente a uma taxa trimestral de:

a) 60,0% d) 72,8%
b) 66,6% e) 84,4%
c) 68,9%

16. (AFTN/96) - Uma empresa aplica $ 300 a taxa de juros compostos de 4% ao mês por 10 meses. A taxa que mais se aproxima da taxa proporcional mensal dessa operação é:

a) 4,60% d) 5,20%
b) 4,40% e) 4,80%
c) 5,00%

17. (CESPE/UnB - TCDF/AFCE/95) - Para que se obtenha R$ 242,00, ao final de seis meses, a uma taxa de juros de 40% a. a., capitalizados trimestralmente, deve-se investir, hoje, a quantia de:

a) R$ 171,43 d) R$ 200,00
b) R$ 172,86 e) R$ 220,00
c) R$ 190,00

18. (CESPE/UnB - TCDF/AFCE/95) - Determinada quantia e investida a taxa de juros compostos de 20% a.a., capitalizados trimestralmente. Para que tal quantia seja duplicada, deve-se esperar:

a) $\dfrac{\log 5}{\log 1{,}05}$ trimestres;

b) $\dfrac{\log 2}{\log 1{,}05}$ trimestres;

c) $\dfrac{\log 5}{\log 1{,}2}$ trimestres;

d) $\dfrac{\log}{\log 1{,}2}$ trimestres;

e) $\dfrac{\log 20}{\log 1{,}2}$ trimestres.

19. (CESPE/UnB - TCU/AFCE/96) - Acerca das taxas utilizadas em juros compostos, julgue os itens a seguir.

(1) Capitalização composta é aquela em que a taxa de juros incide sempre sobre o valor obtido pela soma do capital inicial e dos juros acumulados até o período anterior.
(2) Duas taxas referentes a períodos distintos de capitalização são equivalentes, quando produzem o mesmo montante no final de determinado período de tempo, pela aplicação de um mesmo capital inicial.
(3) Quanto maior o numero de capitalizações, maior e a taxa efetiva.
(4) Para uma mesma taxa nominal, pagamentos de menor periodicidade implicam uma taxa efetiva mais elevada.
(5) A taxa efetiva de 21 % ao ano corresponde a taxa nominal anual de 20%, capitalizadas semestralmente.

20. (TCU-AFCE/92) - Deseja-se comprar um bem que custa X cruzeiros, mas dispõe-se apenas de 1/3 desse valor. A quantia disponível é, então, aplicada em um Fundo de Aplicações Financeiras, a taxa mensal de 26 % , enquanto que o bem sofre mensalmente um reajuste de 20%. Considere as aproximações: log 3 = 0,48; log 105 = 2,021 ; log 0,54 = -0,27.
Assinale a opção correta.

a) Ao final do primeiro ano de aplicação, o bem poderá ser adquirido com o montante obtido.
b) O numero n de meses necessários pare o investimento alcançar o valor do bem é dado pela formula:
$X/3 + n\ 0{,}26\ X/3 = X + n\ 0{,}2X$.
c) O número mínimo de meses de aplicação necessários a aquisição do bem será 23.
d) Decorridos 10 meses, o montante da aplicação será 40% do valor do bem naquele momento.
e) O bem jamais poderá ser adquirido com o montante obtido.

21. (CESPE/UnB - Senado Federal/96) - Acerca de uma aplicação realizada na mesma data e referente a dois capitais (C_1 e C_2) de valores iguais, pelo prazo de um ano, capitalizados semestralmente, a taxa nominal de 42% ao ano, para o capital C_1, e à taxa efetiva de 21% ao ano, para o capital C_2, julgue os itens abaixo.

(1) A taxa nominal, pare a aplicação do capital C_2, é igual a 20% ao ano.
(2) A taxa de capitalização semestral do capital C_1 e igual a 20%.
(3) A taxa de capitalização semestral do capital C_1 e exatamente o dobro da taxa de capitalização semestral do capital C_2.
(4) O montante do capital C_1 é 21% maior que o montante do capital C_2, no prazo estabelecido para a aplicação.
(5) Se apenas o capital C_2 for reaplicado por mais um ano, a mesma taxa estabelecida, o montante de C_2 (ao final do 2º ano de aplicação) será igual ao montante de C_1 (ao final do 1º ano de aplicação).

Gabarito

01. b	**02. c**	**03. d**	**04. d**	**05. d**	**06. d**	**07. b**	**08. b**
09. b	**10. b**	**11. e**	**12. b**	**13. a**	**14. b**	**15. d**	**16. e**
17. d	**18. b**	**19. cceec**	**20. c**	**21. ceecc**			

CONVENÇÃO LINEAR e CONVENÇÃO EXPONENCIAL

Consideremos a seguinte situação:

Um capital é aplicado a juros compostos de 30%a.a, capitalizado anualmente.No entanto, o PRAZO DE APLICAÇÃO foi 6 meses.

Como remunerar o capital?

CONVENÇÃO LINEAR

CONVENÇÃO EXPONENCIAL

PROBLEMAS

01. Complete o quadro abaixo, considerando taxa de 30%a.mês. Capitalização mensal dos juros compostos e capital de $ 100.000

PRAZO (t)	JUROS SIMPLES	JUROS COMPOSTOS Conv. LINEAR	JUROS CONPOSTOS Conv. EXPONENCIAL
20 dias 0< t < 1			
30 dias t = 1 período de capitalização			
130 dias t > 1 período de capitalização			

02. Uma aplicação financeira foi feita pelo prazo de 225 dias. O dinheiro foi aplicado a juros compostos de 40% a.ano e capitalização trimestral. Determine o montante obtido a partir de um capital de $100.000 sob a convenção LINEAR.

A) 125.000 B) 126.905,87 C) 127.050 D) 124.750 E) 120.000

03. Na questão anterior, qual seria a alternativa correta se for usada a convenção EXPONENCIAL

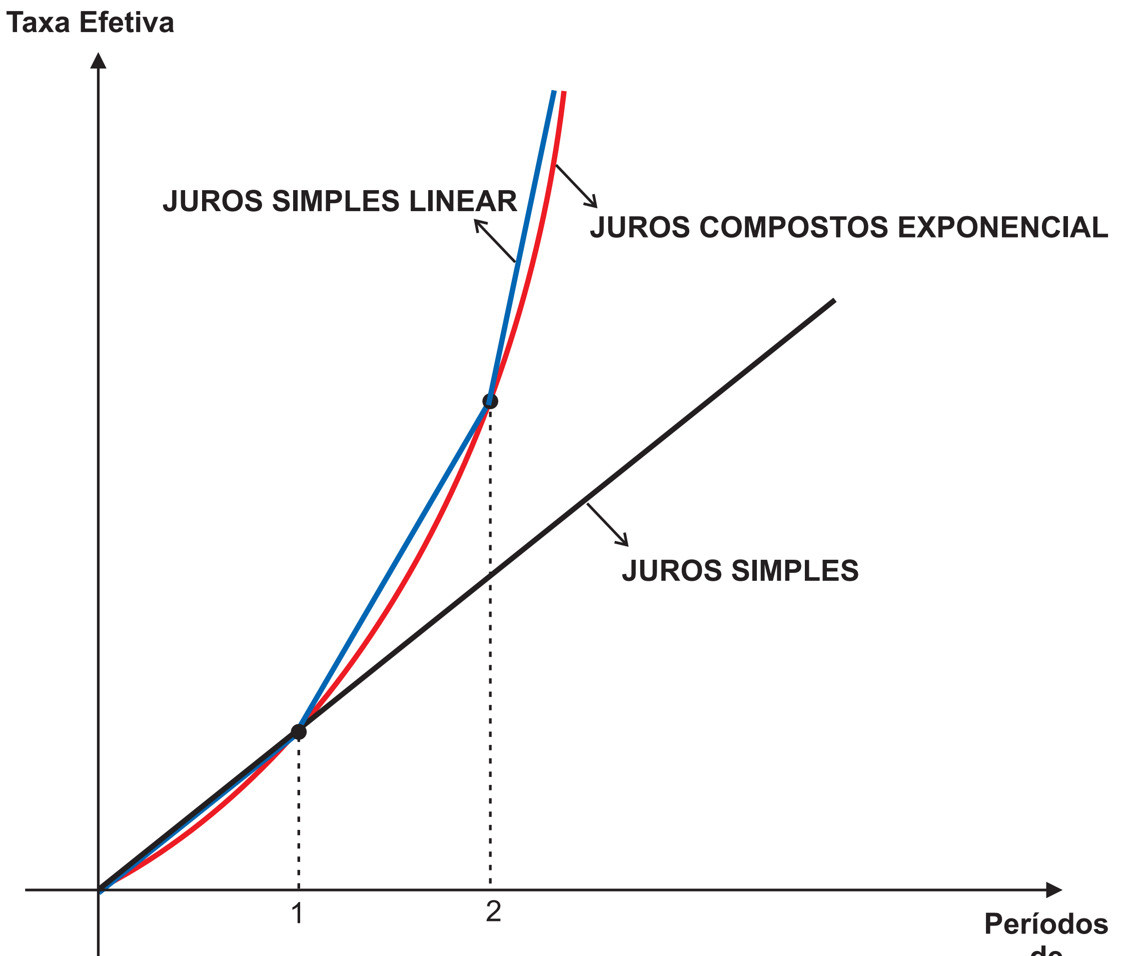
A) 125.000 B) 126.905,87 C) 127.050 D) 124.750 E) 120.000

04. Um capital C = 10.000 é aplicado a juros compostos de 6% a.mês, com capitalização bimestral. O prazo de aplicação foi 100 dias. Determine o montante pela convenção LINEAR e pela convenção EXPONENCIAL.

Gabarito

02. C 03. B 04. LINEAR M= 12.096,00 EXPONENCIAL M= 12.078,97

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA



0 < *t* < 1
O prazo de aplicação é ***MENOR*** que 1 período de CAPITALIZAÇÃO

***t* > 1**
O prazo de aplicação é ***MAIOR*** que 1 período de CAPITALIZAÇÃO

DESCONTO SIMPLES

Suponhamos que você tenha um cheque pré-datado de $1.200 e que só pode ser cobrado em 30 dias.

Necessitando dinheiro hoje e considerando a inflação de 20% ao mês, você pode raciocinar de duas maneiras diferentes:

1º RACIOCÍNIO

Deduz os 20% de inflação sobre o **Valor Nominal** do cheque, obtendo assim seu **Valor Atual**:

(1.200 x 0,8) = $960

Este raciocínio é chamado DESCONTO POR FORA, **comercial** ou **bancário**.
Nele o **desconto** foi de $240.

2º RACIOCÍNIO

Você sabe que um amigo seu tem dinheiro rendendo na poupança a 20% ao mês. Pede a ele que lhe empreste aquele valor **X**, que dentro de 30 dias, após ganhar 20% de acréscimo se torne $1.200,00 e assim ninguém perde nada.

CÁLCULO:
$X \cdot 1{,}2 = 1200$
$X = 1000$

NESTE CASO TEMOS:
Valor nominal: 1200
Valor atual: 1000

Desconto por dentro = $200

Este raciocínio constitui o *DESCONTO POR DENTRO* ou *RACIONAL.*

Os dois raciocínios são aceitos. A Banca Examinadora tem a obrigação de informar o tipo de desconto, pois **concurso** significa interpretação de texto e raciocínio lógico. Ninguém é obrigado a supor uma informação que não está no texto. Na prática, no entanto, usa-se em 99% dos casos o desconto comercial simples que é o que dá maior lucro à instituição financeira

RESUMO

DESCONTO POR DENTRO OU RACIONAL	**DESCONTO POR FORA, COMERCIAL OU BANCÁRIO**
VA ⟶ 100% Neste caso, damos um acréscimo de **it%** sobre o VA para chegar no valor nominal. $VA \cdot \frac{(100 + it)}{100} = VN$ ou Usando **Regra de Três** $\begin{cases} VA \longrightarrow 100\% \\ dd \longrightarrow it\% \end{cases}$ $\begin{cases} VA \longrightarrow 100\% \\ VN \longrightarrow (100 + it)\% \end{cases}$	**VN ⟶ 100%** Neste caso, damos um desconto de **it%** sobre o VN para chegar no valor atual. $VN \cdot \frac{(100 - it)}{100} = VA$ ou Usando **Regra de Três** $\begin{cases} VN \longrightarrow 100\% \\ df \longrightarrow it\% \end{cases}$ $\begin{cases} VN \longrightarrow 100\% \\ VA \longrightarrow (100 - it)\% \end{cases}$

Observe que nos casos acima, é fundamental achar o ***it*** com ***i*** e ***t*** nas mesmas unidades de tempo.

Basicamente só existem estes dois raciocínios para desconto simples. O fato de incluirmos impostos, comissões, ou taxas em cada um deles não significa que existem "OUTROS TIPOS DE DESCONTOS" além do desconto "por dentro" ou desconto "por fora".

ESQUEMA DO DESCONTO COMERCIAL SIMPLES

No exemplo dado:

VN
100 %

O VAf é 80% do VN → VAf = 0,8 . VN

O df é 20% do VN → df = 0,2 . VN

TAXA EFETIVA DE JUROS IMPLÍCITA NO DESCONTO COMERCIAL SIMPLES

Exemplo:

Um título de valor nominal $ 6000 é descontado pelo critério comercial simples 60 dias antes do vencimento a uma taxa de desconto de 10% a.mês.

ANÁLISE DA SITUAÇÃO APRESENTADA

1° PASSO Achar o **it,** ou seja, o **PERCENTUAL** de desconto praticado na operação para os 2 meses de antecipação.

i = 10% a.m.
t = 60 dias = 2 meses
→ it = 20%

2° PASSO

100%
VN
→ VA = 80% do VN
→ df = 20% do VN

VA = $4800   df = $ 1200

3° PASSO Analisando a operação como um INVESTIMENTO, percebemos que o agente financeiro INVESTIU $ 4800 para RECEBER $ 6000 em 60 dias.
Então, o CAPITAL INVESTIDO cresceu efetivamente

$$\frac{VN}{VA} \rightarrow \frac{\$6000}{\$4800} = 1{,}25$$

LUCRO DE 25% em 60 dias!

Dizemos então que a TAXA IMPLICITA EFETIVA DE JUROS na operação foi de 25% no PRAZO DA OPERAÇÃO.

Ou que a TAXA DE JUROS EQUIVALENTE à taxa de DESCONTO COMERCIAL SIMPLES é de 25% em 60 dias.

No entanto, a TAXA MENSAL DE JUROS IMPLÍCITA na operação pode ser calculada a JUROS SIMPLES ou a JUROS COMPOSTOS.

TAXA MENSAL DE JUROS SIMPLES

É proporcional   Portanto fica 12,5% a.m.

TAXA MENSAL DE JUROS COMPOSTOS

Considerando os juros compostos capitalizados mensalmente, a taxa mensal composta que PRODUZ uma taxa EFETIVA de 25% em 2 meses é:

$(X^2) = 1,25 \rightarrow X = \sqrt{1,25} \rightarrow X \quad 1,119$

Isto significa uma TAXA MENSAL COMPOSTA de 11,9% a.m.

DIFERENÇA ENTRE OS DESCONTOS COMERCIAL SIMPLES E RACIONAL SIMPLES

No exemplo anterior, o Valor Nominal do título é $ 6000.
Na ótica do **DESCONTO COMERCIAL** (***POR FORA***), o valor atual é

$VAf = 6000 \,.\, 0,8 \qquad \boxed{VAf = 4800}$

Mas na ótica do **DESCONTO RACIONAL** (***POR DENTRO***), o valor atual é

$VAd = \dfrac{6000}{1,2} \qquad \boxed{VAd = 5000}$

Assim, o **DESCONTO POR FORA**, é de $ 1200 e o **DESCONTO POR DENTRO** é de $1000

EXISTE UMA DIFERENÇA DE $ 200

$dif = df - dd \rightarrow dif = 1200 - 1000 \rightarrow \boxed{dif = 200}$

Essa **DIFERENÇA** também pode ser encontrada fazendo

$dif = VA_{DENTRO} - VA_{FORA} \rightarrow dif = 5000 - 4800 \rightarrow dif = \$\,200$

CUIDADO!

DIFERENÇA = DESCONTO **POR FORA** – DESCONTO **POR DENTRO**

$dif = df - dd$

OU

DIFERENÇA = VALOR ATUAL **POR DENTRO** – VALOR ATUAL **POR FORA**

$dif = VAd - VAf$

No entanto, considere que o problema que estamos analisando tivesse o seguinte enunciado:

PROBLEMA 1

A diferença entre os descontos simples, de um título é $ 200. Determine o valor NOMINAL do título sabendo que a taxa de desconto é 10%a.m. e o prazo é 2 meses antes do vencimento.

1° MÉTODO

$$\text{dif} = \text{VAd} - \text{VAf} \rightarrow 200 = \frac{VN}{1,2} - VN \cdot 0,8$$

Vamos multiplicar todos os membros da equação por 1,2

$$200 \cdot 1,2 = 1VN - VN \cdot 0,8 \cdot 1,2$$
$$240 = 1VN - 0,96VN$$
$$240 = 0,04 \cdot VN$$

$$\frac{240}{0,04} = VN \qquad \boxed{VN = 6000}$$

2° MÉTODO

Partimos do seguinte:

$$\frac{df}{VN} = \frac{dd}{VAdentro} = \frac{it\,\%}{100\%}$$

Relação 1

Note que sempre o denominador corresponde ao referencial 100%.

Usando a propriedade das Proporções temos:

$$\frac{df - dd}{\underbrace{VN - Vad}_{dd}} \rightarrow \frac{dif}{dd} = \frac{it}{100} \rightarrow \boxed{dif = \frac{dd \cdot i \cdot t}{100}}$$

Relação 2

Assim, no problema:

$$200 = \frac{dd \cdot 10 \cdot 2}{100} \qquad \boxed{dd = 1000}$$

Ora, se a diferença entre os descontos é $200, concluímos que o desconto ***POR FORA*** é

$$df = 1000 + 200 \qquad \boxed{df = 1200}$$

Usando **REGRA DE TRÊS**

$$\begin{cases} VN \rightarrow 100\,\% \\ df \rightarrow it\,\% \end{cases}$$

$$\begin{cases} VN \rightarrow 100\,\% \\ 1200 \rightarrow 20\,\% \end{cases}$$

Logo VN = $ 6000 <

VAf = 6000 – 1200

VAd = 6000 – 1000

3° MÉTODO

Partimos da relação:

$$\boxed{\frac{df}{dd} = \frac{VN}{VAd} = \frac{100 + it}{100}}$$ ***Relação 3***

$$\frac{df}{dd} = \frac{VN}{VAd}$$ Substituindo VAd por VN – dd

fica:

$$\frac{df}{dd} = \frac{VN}{VN - dd}$$

$$df \,.\, (VN - dd) = VN \,.\, dd$$
$$df \,.\, VN - VN.dd = df \,.\, dd$$
$$VN \,.\, (df - dd) = df \,.dd$$

$$df - dd = \frac{df \,.dd}{VN} \rightarrow \boxed{dif = \frac{df \,.\, dd}{VN}}$$ ***Relação 4***

Então o problema fica:

$$200 = \frac{1000 \text{ x } 1200}{VN} \rightarrow VN = \frac{1.200.000}{200}$$

$$\boxed{VN = \$\ 6000}$$

PROBLEMA 2

O desconto racional simples de um título de valor VN, é 1000. Determine o desconto ***COMERCIAL SIMPLES***, sabendo que o título foi descontado 2 meses antes do vencimento a taxa de 10%a.m.

Determine VN.

Vamos partir da *relação 3*

$$\frac{df}{dd} = \frac{VN}{VAd} = \frac{100 + it}{100}$$

$$\frac{df}{dd} = \frac{100 + it}{100} \rightarrow \frac{df}{dd} = \frac{100 + 20}{100} \rightarrow \frac{df}{dd} = 1{,}2 \rightarrow \frac{df}{1000} = 1{,}2$$

$\boxed{df = 1200}$ e, por Regra de Três $\boxed{VN = 6000}$

Logo, vamos destacar a seguinte ***Relação***

$$df = dd \,.\, (\ \ )$$

acréscimo de it% de acordo com o "***BALCONISTA***".

Relação 5

PROBLEMA 3

A diferença entre os descontos por fora e por dentro (critério simples) de um título de valor nominal VN é 80. Se o valor atual POR DENTRO é 2000, determine o desconto POR DENTRO, o desconto POR FORA, o VN, a taxa de desconto TOTAL da operação, e a TAXA IMPLÍCITA EFETIVA de juros no prazo da operação.

Usaremos a *Relação 1*

$$\frac{df}{VN} = \frac{dd}{VA \text{ dentro}} \rightarrow \frac{df - dd}{VN - VAd}$$

dd

Que também pode ser escrita

$$\boxed{\frac{df}{VN} = \frac{dd}{VAd} = \frac{df - dd}{dd}}$$

$$\boxed{\frac{dd}{VAd} = \frac{dif}{dd}}$$ ***Relação 6*** ou $$\boxed{(dd)^2 = VAd \,.\, dif}$$

Então no problema proposto:

$$\frac{dd}{2000} = \frac{80}{dd}$$

$dd^2 = 80 \times 2000$ → $dd^2 = 160.000$ → $\boxed{dd = 400}$

Então $df = 480$

$VN = VAd + dd$

$VN = 2000 + 400$

$\boxed{VN = 2400}$

TAXA DE DESCONTO

$\frac{df}{VN} = \frac{it}{100}$ → $\frac{480}{2400}$ → 20% no prazo considerado

TAXA EFETIVA IMPLÍCITA DE JUROS NO PRAZO CONSIDERADO

$\frac{VN}{VAf} = \frac{2400}{1920} = 1,25$ → 25%

PRAZOS DE APLICAÇÃO NÃO CORRESPONDEM A UM NÚMERO INTEIRO DE PERÍODOS DE CAPITALIZAÇÃO

$\boxed{dif = df - dd}$ ou $\boxed{dif = VAd - VAf}$

$\boxed{\frac{df}{VN} = \frac{dd}{Vad} = \frac{it\,\%}{100\%}}$ ou $\boxed{\frac{df}{dd} = \frac{VN}{VAd} = \frac{(100 + it)\%}{100\%}}$

Sempre o denominador corresponde ao referencial 100%.

CONCLUSÕES

$\boxed{dif = \frac{dd \,.\, i \,.\, t}{100}}$ $\boxed{dif = \frac{dd \,.\, df}{VN}}$

$df = dd.(\quad)$

acréscimo de it% de acordo com o “***BALCONISTA***”.

$\boxed{\frac{dd}{VAd} = \frac{dif}{dd}}$ ou $\boxed{dd^2 = VAd \,.\, dif}$

PROBLEMAS DE DESCONTO

01. Qual o desconto comercial de um título apresentado 2 meses antes do vencimento cujo valor é \$200.000 e cuja taxa foi de 15% ao mês?

02. O desconto bancário sofrido por um título é de \$75.000. Se a taxa é de 5% ao mês e o título é apresentado 90 dias antes do vencimento, determine o valor nominal e o valor atual.

03. Qual a taxa de desconto comercial simples de uma promissória paga 5 meses antes do vencimento sabendo-se que se reduziu de \$320.000 para \$192.000?

04. Quanto tempo antes do vencimento foi paga uma letra de \$600.000, descontada por fora a 6% a.a., se o desconto foi de \$27.000?

05. Uma promissória paga 8 meses antes do vencimento, à taxa de 36%a.a., se reduziu a \$95.000. Qual o valor nominal considerando o desconto comercial simples?

06. Qual o desconto por dentro de um título de \$296.000 a 24% ao mês em 2 meses?

07. Um título apresentado 7 meses antes do vencimento, foi descontado por dentro à taxa de 8% ao mês e se reduziu para \$400.000. Determine o desconto e o valor nominal.

08. Uma letra sofre um desconto de \$50.000, por dentro. Sendo a taxa de 60% a.a. e o prazo 120 dias, determine o valor nominal e o valor atual.

09. Quanto tempo antes do vencimento foi descontada por dentro uma letra de \$180.000 que se reduziu para \$120.000 a uma taxa de 12,5% ao mês?

10. Qual a taxa praticada no desconto por dentro de um título de \$990.000 que se reduziu para \$900.000 em um prazo de 1 ano e 3 meses?

11. Uma letra de \$50.000 foi descontada em 6 meses e produziu o líquido de \$47.500. Qual a taxa anual de desconto?

12. A que taxa foi descontado um título de \$80.000 que se reduziu para \$60.000, apresentado 1 2/3 anos antes do vencimento?

(A) 15% a.a.
(B) 75% a. m.
(C) 3,75% a. m.
(D) 6,25% a. m.
(E) 90% a.a.

13. Calcule o valor atual de uma letra que sofre desconto racional 2 meses e 20 dias antes do vencimento, sabendo-se que seu valor nominal é \$20.400 e que a taxa de desconto é de 9% a.a.

(A) \$2.040
(B) \$20.000
(C) \$19.600
(D) \$24.000
(E) \$19.992

14. Certo título foi descontado por fora 108 dias antes do vencimento, à taxa de 9,5% a.a. e produziu o líquido de \$310.880. Qual o desconto?

(A) \$9.120
(B) \$320.000
(C) \$8.860,08
(D) \$3.200
(E) \$10.880

15. A diferença entre os descontos por dentro e por fora de uma letra, calculados em 6 meses, à taxa de 5% a.a. é de $45. Calcular o valor nominal:

(A) $13,50
(B) $58,50
(C) $1.800
(D) $1.845
(E) $73.800

16. A diferença entre os descontos por fora e por dentro de um título é de $36.000. Sabendo-se que a taxa mensal é de 18% e que o prazo é de 50 dias, determine respectivamente o valor nominal, valor atual racional e o valor atual bancário.

17. Um título de $903.000 é apresentado para desconto 100 dias antes do vencimento. Determine o valor atual do ponto de vista do desconto por fora, do desconto por dentro. Qual a diferença entre os descontos? i = 12% a.a.

18. A diferença entre os descontos bancário e racional de um título é $880. Se o desconto racional é $14.400 e a taxa 20% a.a., determine quanto tempo antes do vencimento foi apresentado e qual o valor nominal.

19. Uma duplicata de $ 2.400.000 descontada 200 dias antes do seu vencimento, sofreu um desconto por fora de $30.000. Qual a taxa anual da operação?

20. Um título foi descontado por dentro à taxa de 6% a.a., no prazo de 120 dias, ficando reduzido a $220.500. Qual era o valor nominal?

21. Um título de valor nominal X é descontado por dentro a uma taxa de 10% ao mês, 60 dias antes do vencimento e produziu o mesmo valor atual de outro título de valor nominal X+50 que foi descontado por fora a 10% ao mês, 60 dias antes do vencimento. Determine o valor nominal e o valor atual.

22. Um título de valor nominal $12.000 sofre um desconto à taxa de 6% a.a., 120 dias antes do vencimento. Qual o valor do desconto?

(A) $240
(B) $260
(C) $300
(D) $853
(E) $864

23. O valor de um título descontado sob o critério racional simples é 1/4 do seu valor nominal. Determine a taxa de desconto, sabendo que a negociação ocorreu 30 meses antes do vencimento.

(A) 300% a.a
(B) 10% a.m
(C) 400%a.a
(D)300%a.m
(E) 13%a.m,

24. Qual o valor atual de uma duplicata que sofre um desconto por dentro de $500, a 50 dias de seu vencimento, à taxa de 3% ao mês?

(A) $9.500
(B) $9.550
(C) $10.000
(D) $10.050
(E) $ 10.500

25. Utilizando o desconto racional, o valor que devo pagar por um título com vencimento daqui a 6 meses se o seu valor nominal for de $29.500 e eu desejo ganhar 36% a.a.é de:

(A) $24.000
(B) $25.000
(C) $27.500
(D) $18.800
(E) $24.190

26. Um título de $8.000 sofreu um desconto racional de $ 2.000, 8 meses antes do vencimento. Qual a taxa anual empregada?

(A) 28%
(B) 37,5%
(C) 45%
(D) 50%
(E) 52,5%

27. Determinar o valor atual de certa nota promissória que descontada por fora a taxa de 8,5% a.a., 144 dias antes do vencimento, sofreu \$6.120 de desconto.

28. Qual o desconto por dentro de um título, à taxa de 16% a.a., em 7 meses e meio, considerando que o valor nominal do título é \$5.148.

29. Uma duplicata de \$128.000 descontada 198 dias antes do vencimento sofreu \$38.016 de desconto por fora. Qual a taxa anual usada na operação?

30. Um banco recebeu para desconto, à taxa de 9% a.a., duas duplicatas cujos valores nominais somavam juntos \$400.000. Sabendo-se que o deconto de ambas atingiu a \$11.200 e que o prazo da primeira era 4 meses e o da segunda 100 dias, determine o valor nominal de cada duplicata. Calcule também o valor atual de ambas.

31. Um banco recebeu 3 duplicatas para desconto. A primeira representa 1/5 do total e a segunda representa 2/3 da terceira. A taxa da primeira era de 3% ao mês e seu prazo de 80 dias. A taxa da segunda era de 5% ao mês e seu prazo de 105 dias. A taxa da terceira era de 18% a.a. e seu prazo de 50 dias. Sabendo-se que o desconto total é de %50.400, qual o valor nominal de cada duplicata?

32. Um banco recebeu para desconto duas duplicatas. Seus valores nominais importavam conjuntamente \$80.000. A taxa de ambas era 2,4% ao mês e o desconto das duas atingiu a \$2.800. Determine o valor nominal de cada duplicata sabendo-se que a primeira foi descontada 40 dias antes e a segunda 50 dias antes do vencimento.

33. Um banco recebeu 3 duplicatas para desconto. A primeira representa 1/3 da segunda a e terceira representa 3/4 da primeira. A taxa de todas é 6% a.a. A primeira tem prazo de 2 meses, a segunda 3 meses e a terceira 4 meses. Se o desconto total foi \$1.400, determine o valor nominal de cada duplicata.

34. Qual é o valor da diferença entre os descontos por dentro e por fora de uma nota promissória de \$1120 se ela for descontada 40 dias antes do seu vencimento a uma taxa de 9% ao mês?

35. A diferença entre os descontos comercial e racional incidentes sobre um mesmo título é de \$3,00. Sabendo que ambos foram calculados à taxa de 15% ao ano e 4 meses antes do vencimento, qual o valor nominal do título?

36. Um título descontado por dentro produziu o líquido de \$2000 e descontado por fora, produziu o líquido de \$1920. Qual o valor nominal do título?

37. Qual o desconto por fora de um título de valor nominal VN que gera um desconto por dentro de \$300 se operado a 4% ao mês, 2 meses antes do vencimento? Determine VN:

38. (AFTN/85) Uma empresa descontou uma duplicata em um banco que adota uma taxa de 84% ao ano e o desconto comercial simples. O valor do desconto foi de Cr\$ 10.164. Se na operação fosse adotado o desconto racional simples, o valor do desconto seria reduzido em Cr\$ 1.764. Nessas condições, o valor nominal da duplicata é de:

(A) Cr\$ 45.000
(B) Cr\$ 46.700
(C) Cr\$ 47.300
(D) Cr\$ 48.400
(E) Cr\$ 50.000

39. (TTN/94) O valor atual racional de um título é igual a 1/2 de seu valor nominal. Calcular a taxa de desconto, sabendo-se que o pagamento desse título foi antecipado de 5 meses.

(A) 200% ao ano
(B) 20% ao ano
(C) 25% ao mês
(D) 28% ao mês
(E) 220% ao ano

40. (TTN/89) Utilizando o desconto racional, o valor que devo pagar por um título com vencimento daqui a 6 meses, se o seu valor nominal for de NCz$ 29.500,00 e eu desejo ganhar 36% ao ano, é de:

(A) NCz$ 24.000,00
(B) NCz$ 25.000,00
(C) NCz$ 27.500,00
(D) NCz$ 18.880,00
(E) NCz$ 24.190,00

41. (TTN/94) Admita-se que uma duplicata tenha sido submetida a 2 tipos de descontos. No primeiro caso, a juros simples, a uma taxa de 10% ao ano, vencível em 180 dias, com desconto comercial (por for(A). No segundo caso, com desconto racional (por dentro), mantendo-se as mesmas condições. Sabendo-se que a soma dos descontos, por fora e por dentro, foi de R$ 635,50, o valor nominal do título era de R$:

(A) 6.510,00
(B) 6.430,00
(C) 6.590,00
(D) 5.970,00
(E) 6.240,00

42. (TTN/94) José descontou 2 duplicatas em um banco, no regime de juros simples comerciais, a uma taxa de juros de 15 %a.a. O primeiro título vencia em 270n dias e o segundo em 160 dias, sendo que o último título era de valor nominal 50% superior ao primeiro. Sabendo-se que os dois descontos somaram o valor de R$ 382,50, o título que produziu maior desconto tinha valor nominal, em R$, de:

(A) 1.850,00
(B) 1.750,00
(C) 1.800,00
(D) 1.700,00
(E) 1.900,00

43. (AFTN/96) Você possui uma duplicata cujo valor de face é $150,00. Esta duplicata vence em 3 meses. O banco com o qual você normalmente opera além da taxa normal de desconto mensal (simples por for(A) também fará uma retenção de 15% do valor de face da duplicata a titulo de saldo médio, permanecendo bloqueado em sua conta este valor desde a data do desconto até a data do vencimento da duplicata. Caso você desconte a duplicata no banco você receberá líquidos, hoje, $105,00. A taxa de desconto que mais se aproxima a taxa praticada por este banco é:

(A) 5,0%
(B) 5,2%
(C) 4,6%
(D) 4,8%
(E) 5,4%

44. (CESPE/UnB - Senado Federal/96) No desconto simples bancário de 4 títulos à mesma taxa de desconto, cada um no valor de R$ 2.000,00, com vencimentos mensais e sucessivos, a partir de 30 dias, obteve-se um valor líquido de R$ 7.000,00. Com relação a situação descrita, julgue os itens que se seguem:

(1) A taxa de desconto simples do título que vence em 120 dias correspondente à taxa de juros simples de 6,25% ao mês.
(2) A taxa de desconto simples para cada título é igual a 5% ao mês.
(3) O desconto obtido para o título que vence em 90 dias é o triplo do desconto obtido para o título que vence em 30 dias.
(4) As taxas mensais de juros simples dos valores atuais dos títulos são diferentes.
(5) No desconto simples bancário, a taxa de desconto incide sobre o valor atual ou líquido.

Gabarito

01. df = 60.000
02. NV = 500.000
VA = 425.000
03. i = 8% a.mês
04. 9 meses
05. VN = 125.000
06. dd = 96.000
07. dd = 224.000
VN = 624.000
08. VN = 300.000
VA = 250.000
09. 4 meses
10. i = 8% a.a.
11. 10% a.a.
12. 15% a.a.
13. B
14. A
15. E
16. VN = 520.000
VAd = 400.000
VAf = 364.000
17. VA(fora) = 872.900
VA(d) = 873.870,97
diferença = 970,97
18. 110 dias
19. i = 2,25% a.a.
20. VN = 224.910
21. VA = $1.000
x = $1.200
x + 50 = $1.250
22. A
23. B
24. C
25. B
26. D
27. $173.880
28. $468
29. 54% a./a.
30. VN = 240.000
e 160.000
VA = 232.800
e 156.000
31. 120.000
192.000
288.000
32 50.000 e
30.000
33. 20.000
60.000
15.000
34. 14,40
35. $1260
36. VN = 2400 it = 20%
37. df = 324 VN = 4050
38. D
39. B
40. B
41. A
42. C
43. A
44. C-C-C-C-E

ESQUEMA COMPARATIVO ENTRE DESCONTOS SIMPLES E COMPOSTOS

Considere um título de valor nominal VN apresentado 6 meses antes do vencimento a uma taxa de 5%a.mês.

O VALOR ATUAL VA poderá ser encontrado por 4 critérios:

DESCONTO COMERCIAL SIMPLES	DESCONTO COMERCIAL COMPOSTO
$VA = VN \cdot 0{,}7$	$VA = VN \cdot (0{,}95)^6$
DESCONTO RACIONAL SIMPLES	**DESCONTO RACIONAL COMPOSTO**
$VA = \frac{VN}{1{,}3}$	$VA = \frac{VN}{(1{,}05)^6}$

O Desconto Comercial Simples é o mais usado no "Desconto de Títulos" (Factoring).
O Desconto Comercial Composto é usado mais em DEPRECIAÇÃO do valor de BENS.
Já o Desconto Racional Composto é usado em EMPRÉSTIMOS E FINANCIAMENTOS.
Finalmente, O Desconto Racional Simples é usado em negociações "entre amigos", mas cai bastante em Concursos Públicos.

PROBLEMA PROPOSTO

Determine o VA de um título de $ 145.200, apresentado 2 meses antes do vencimento, a uma taxa de 10%a.mês, sob os 4 critérios de desconto.

DESCONTO COMERCIAL SIMPLES	DESCONTO COMERCIAL COMPOSTO
DESCONTO RACIONAL SIMPLES	**DESCONTO RACIONAL COMPOSTO**

EQUIVALÊNCIA ENTRE TAXA DE DESCONTO RACIONAL E COMERCIAL COMPOSTOS

Taxas de desconto equivalentes são aquelas que produzem decontos iguais quando aplicados a um mesmo título por igual tempo de antecipação.

Consideramos o mesmo período de capitalização para uma taxa i_R de desconto racional e uma outra i_C do desconto comercial, podemos afirmar que a relação de equivalência entre i_R e i_C nos dará:

$$D_C = D_R$$

$$VN - D_C = VN - D_R$$

$$VA_C = VA_R$$

$$VN \,.\, (1 - i_C)^n = \frac{VN}{(1 + i_R)^n}$$

$$(1 - i_C)^n \,.\, (1 + i_R)^n = \frac{VN}{VN} = 1$$

$$\sqrt[n]{(1 - i_C)^n \,.\, (1 + i_R)^n} = \sqrt[n]{1}$$

Então:

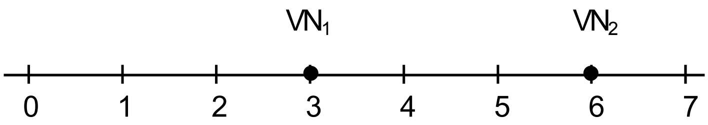
$$\boxed{(1 - i_C) \,.\, (1 + i_R) = 1}$$

Exemplo:

Determine a taxa anual de desconto racional composto equivalente à taxa de desconto comercial composto de 37,5% ao ano.

Gabarito: 60 % ao ano.

EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS SOB ÓTICA DE JUROS E DESCONTOS SIMPLES



O título VN_1 deve ser pago em t = 3 e o título VN_2 deve ser pago em t = 6.

Digamos que esses dois títulos queiram ser substituídos por 3 títulos de valor nominal x para serem pagos em t = 2, t = 5 e t = 7.

Como proceder?

A idéia geral, válida em qualquer dos 4 critérios apresentados anteriormente é que:

O SOMATÓRIO dos valores atuais (na data zero) dos títulos que saem deve ser igual ao SOMATÓRIO dos valores atuais (na data zero) dos títulos que entram.

No caso

$$\underbrace{VA_1 + VA_2}_{\substack{\text{Na data zero} \\ \text{Títulos que saem}}} = \underbrace{VA_3 + VA_4 + VA_5}_{\substack{\text{Na data zero} \\ \text{Títulos que entram}}}$$

O valor atual pode ser encontrado por qualquer um dos 4 critérios. Por isso deve ficar claro qual o critério adotado.

DATA FOCAL

É a data escolhida como **REFERÊNCIA** para comparação de capitais.
No critério de juros ou descontos simples, a **DATA FOCAL** deverá ser, **OBRIGATÓRIAMENTE A DATA ZERO**.

Já sob critério do desconto racional composto, qualquer data pode ser escolhida de comparação de capitais e não haverá distorções.

PROBLEMAS

01. Desejamos substituir um título vencível em 3 meses por outro com vencimento em 5 meses. Sabendo que o VN do título é 32375 e a taxa de 2,5%ao mês, de desconto comercial simples, determine o novo valor do título:

02. Deseja-se substituir 2 títulos um de $ 50.000 para 90 dias e outro de $ 120.000 para 60 dias, por três outros, com mesmo valor nominal, vencíveis, respectivamente em 30, 60 e 90 dias. Calcule o valor nominal comum, sabendo que a taxa de desconto comercial simples é de 3% ao mês:

03. (AFTN) Uma firma deseja alterar as datas e valores de um financiamento contratado. Este financiamento foi contratado, há 30 dias, a uma taxa de juros simples de 2% ao mês. A instituição financeira não cobra custas nem taxas para fazer estas alterações. A taxa de juros não sofrerá alterações.

Condições pactuadas inicialmente: Paga-mento duas prestações mensais e sucessi-vas de $11.024, a serem pagas em 60 e 90 dias.

Condições desejadas: Pagamento em três prestações iguais; sendo a primeira ao final do 10° mês; a 2ª ao final do 30° mês; a terceira ao final do 70° mês.

Caso sejam aprovadas as alterações, o valor que mais se aproxima do valor unitário de cada uma das novas prestações, é:

(A) $8.200,00
(B) $9.333,33
(C) $10.752,31
(D) $11.200,00
(E) $ 12.933,60

04. (TTN) Um negociante tem duas dívidas a pagar, uma de Cr$ 3000,00, com 45 dias de prazo e outra de Cr$ 8400,00, pagável em 60 dias. O negociante quer substituir essas duas dívidas por uma única, com 30 dias de prazo. Sabendo-se que a taxa de desconto comercial é de 12% ao ano e usando a data zero, o valor nominal dessa dívida será de:

(A) Cr$ 11.287,00
(B) Cr$ 8.232,00
(C) Cr$ 9.332,00
(D) Cr$ 11.300,00
(E) Cr$ 8.445,00

05. (AFTN) João deve a um banco $ 190.000 que vencem daqui a 30 dias. Por não dispor de numerário suficiente, propõe a prorrogação da dívida por mais 90 dias. Admitindo-se para o cálculo do valor atual a DATA FOCAL ZÉRO (t =0) e que o banco adote a taxa de desconto comercial simples de 72% ao ano, o valor do novo título será de:

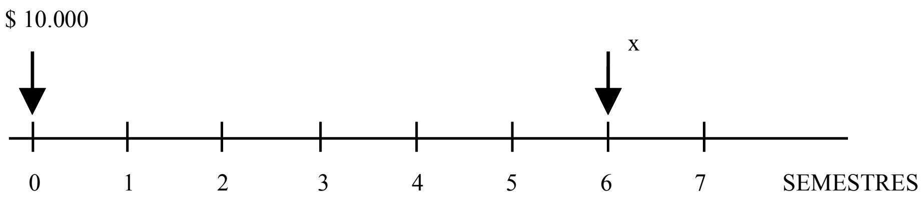
(A) $ 235.000
(B) $ 238.000
(C) $ 240.000
(D) $ 243.000
(E) $ 245.000

Gabarito

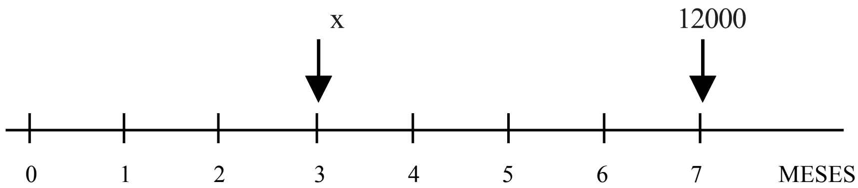
01. 34.225
02. 56.134,75
03. D
04. D
05. A

RENDAS UNIFORMES E VARIÁVEIS

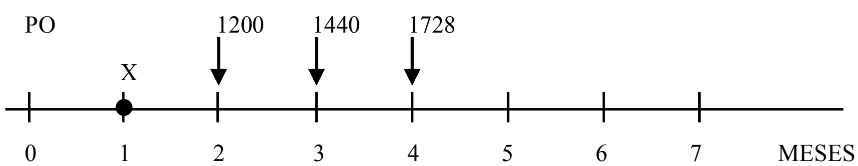
EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS A JUROS COMPOSTOS



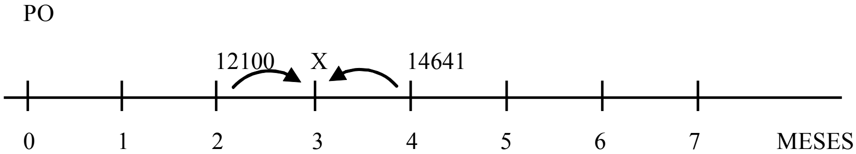
1. Uma mercadoria de $10.000 será paga na data 6.Qual o valor na data 6, a juros compostos de 10% a.ano com capitalização semestral?



2. Uma compra seria paga na data 7 com um cheque de $12.000.
Desejando antecipar o pagamento para data 3, devemos substituir o cheque de $12.000 por outro de valor igual a ___________ . Considere juros compostos de 3% a.mês

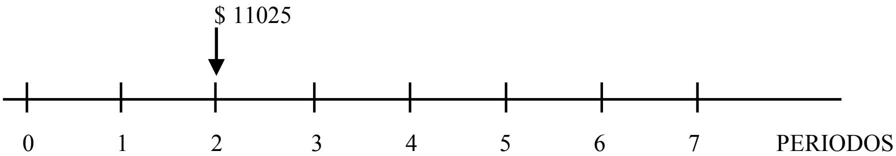


3.Um produto custa à vista Po, e é vendido em 3 cheques conforme mostra o FLUXO DE CAIXA acima.
Desejando trocar para pagamento único na DATA UM, o valor x do cheque será:
Determine também o valor à vista Po.
Considere juros compostos de 20%a.mês.



4. Deseja-se substituir os dois cheques do gráfico por um pagamento único na data 3. Calcule o valor de x para i = 10% a.mês.

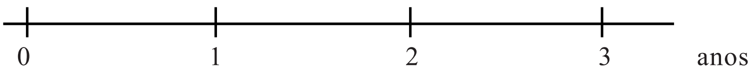
5. No exemplo anterior, qual o valor atual na data zero? (Que pode ser preço à vista, valor principal do empréstimo, etc...)



6. Determine o valor atual do título acima nas datas ZERO e SEIS para uma taxa de 5% ao período(meses, bimestre,etc...)

7. Uma máquina de preço à vista Po pode ser paga 2 anos após a compra em parcela única de $ 11.236. Considerando juros compostos de 6% a.ano, determine o PREÇO À VISTA.

8. Um trator é vendido à vista ou em 3 parcelas anuais de $36.000 cada uma, sendo a primeira no ato da compra. Se a taxa de juros compostos é 20% a.ano, qual o PREÇO Á VISTA?



Gabarito

01. 10.000 . $(1,05)^6$ **02.** 1200/$(1,3)^4$ **03.** x = 3000 Po = 2500 **04.** x = 26620 **05.** Po = 20.000
06. VA na data ZERO = 10.000 VA na data SEIS = 11.025.$(1,05)^4$ **07.** Po = 10.000 **08.** Po = 91.000

SÉRIE DE CAPITAIS A JUROS COMPOSTOS

PROBLEMA PROPOSTO

7 7 7 7 7 7 7

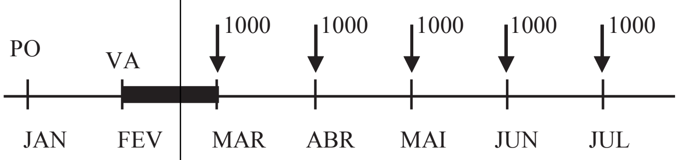
i =10% a.mês

A) Qual o valor único das 5 parcelas na data 7 de julho?

B) Qual o valor atual de toda a série de capitais na data 7 de fevereiro?

C) Qual o valor da série na data 7 de janeiro?

SOLUÇÃO



Gabarito

A = 6105,10 B = 3790,79 C = 3446,17

CLASSIFICAÇÃO DAS RENDAS

A sucessão dos depósitos feitos para se constituir um capital (CAPITALIZAÇÃO) ou de pagamento feitos para se resgatar uma DÍVIDA (amortização) é chamada de RENDAS CERTAS.

Pode ocorrer, também, o caso em que se tem o pagamento pelo uso, sem que haja AMORTIZAÇÃO, que é o caso dos ALUGUÉIS.

Esses exemplos caracterizam a existência das RENDAS ou ANUIDADES que podem ser divididas em dois grupos:

A) RENDAS CERTAS ou DETERMINÍSTICAS: são aquelas que não dependem de fatores externos e são pré-determinadas. São estudadas pela MATEMÁTICA FINANCEIRA.

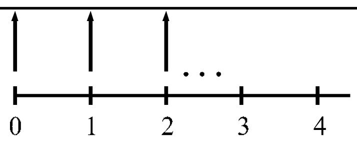
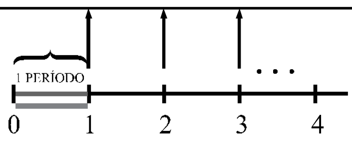
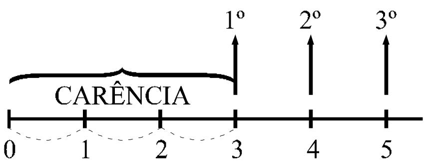
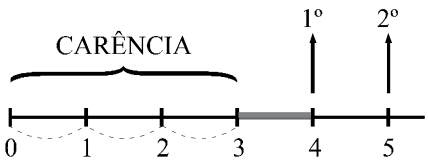
B) RENDAS ALEATÓRIAS ou PROBABILÍSTICAS: são aquelas em que os pagamentos e/ou recebimentos são imprecisos ou o seu início e/ou final são aleatórios.

Exemplo: seguros de vida - o valor dos pagamentos é CERTO mas a duração é INCERTA.

Estes tipos de renda são estudados pela MATEMÁTICA ATUARIAL.

- RENDAS
  - CERTAS
    - PERIÓDICAS
      - TEMPORÁRIAS
        - CONSTANTES
          - IMEDIATAS
            - ANTECIPADA
            - POSTECIPADA
          - DIFERIDAS
            - ANTECIPADA
            - POSTECIPADA
        - VARIÁVEIS
      - PERPÉTUAS
    - NÃO-PERIÓDICAS
  - ALEATÓRIAS

EXEMPLOS

IMEDIATAS ANTECIPADAS	*IMEDIATA POSTECIPADA*
 1º pagto. no início do 1º período	 1º pagto. no final do 1º período
DIFERIDA ANTECIPADA	***DIFERIDA POSTECIPADA***
 Ex.: carência de 3 meses	 Ex.: carência de 3 meses

Observação

Certos professores criaram o "vício" de subentender rendas diferidas como sendo diferidas postecipadas. Tenha cuidado!

Na verdade as diferidas podem ser antecipadas ou postecipadas. Não estabelecer o tipo significa "sonegar" informações do aluno.

CAPITALIZAÇÃO

Podemos entender que a sucessão dos depósitos ou pagamentos feitos de forma periódica e constante formará um MONTANTE que pode ser utilizado como POUPANÇA ou como ACÚMULO DE CAPITAL para liquidar uma DÍVIDA que por sua vez também cresce nesse período. A dívida será saldada quando o PRINCIPAL ACRESCIDO DOS JUROS for equivalente ao montante acumulado pelos sucessivos depósitos ou pagamentos.

EXEMPLO

Consideremos um capital X, aplicado mensalmente a juros compostos, sempre no mesmo dia do mês, seja este qual for.

	10 JAN	10 FEV	10 MAR	10 ABR	10 MAI	10 JUN
1º depósito	X	X . (1 + i)	$X\,.\,(1+i)^2$	$X\,.\,(1+i)^3$	$X\,.\,(1+i)^4$	$X\,.\,(1+i)^5$
2º depósito		X	X . (1 + i)	$X\,.\,(1+i)^2$	$X\,.\,(1+i)^3$	$X\,.\,(1+i)^4$
3º depósito			X	X . (1 + i)	$X\,.\,(1+i)^2$	$X\,.\,(1+i)^3$
4º depósito				X	X . (1 + i)	$X\,.\,(1+i)^2$
5º depósito					X	X . (1 + i)
6º depósito						X

MONTANTES NO MOMENTO DO ÚLTIMO DEPÓSITO

Observamos que a SOMA DOS MONTANTES decorrentes da aplicação mensal de CADA CAPITAL X, forma uma PG de razão q = (1 + i), onde n é o número de aplicações.

$$\mathbf{M = X + X\,.\,(1+i) + X\,.\,(1+i)^2 + X\,.\,(1+i)^3 + \ldots X\,.\,(1+i)^{n-1}}$$

Usando a fórmula da SOMA DOS TERMOS DE UMA PG, temos:

$$\boxed{Sn = \frac{a1\,.\,(q^n - 1)}{q - 1}}$$

$$\boxed{M = \frac{X\,.\,[(1+i)^n - 1]}{i}}$$

MONTANTE DOS CRÉDITOS NO MOMENTO DO ÚLTIMO DEPÓSITO

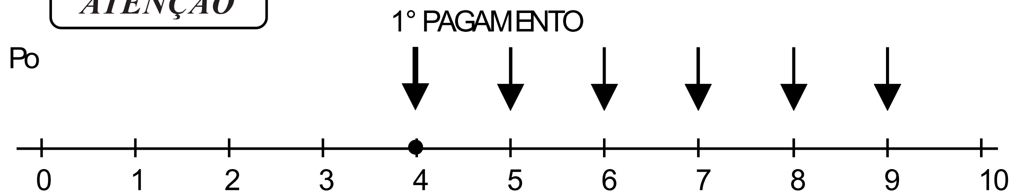
Note-se que se quisermos saber o montante no FINAL do último período, todo o MONTANTE crescerá (1 + i).

Assim,

$$\boxed{M = \frac{X\,.\,[(1+i)^n - 1]\,.\,(1+i)}{i}}$$

E o montante **n** períodos após o último depósito crescerá $(1 + i)^n$, ou seja, sob regime de capitalização composta.

ATENÇÃO



A figura mostra que o 1° pagamento foi feito em t = 4. Para identificar a data desse pagamento podemos dizer:

A) O 1° pagamento foi feito no início do **5°** mês.
B) A renda é diferida antecipada com **4** meses de carência.
C) A renda é diferida postecipada com **3** meses de carência.

RESUMO TEÓRICO

$M = \frac{X\,[(\ \ )^{N}-1]}{i}$ ou $M = X\,.Sn \neg i$

M é o montante de N parcelas iguais e periódicas, no momento imediatamente posterior ao último depósito.
X = Valor constante de cada parcela

N = Número de parcelas

i = Taxa expressa na forma decimal

Sn ¬ *i* ou FAC = Fator de acumulação de capital

PROBLEMAS PROPOSTOS

01 Determine o montante acumulado após 20 depósitos mensais de R$1.000, colocado a juros compostos 5% a.mês, no instante imediatamente posterior ao 20º depósito.

02 Determine o montante obtido pelo depósito periódico e constante de $600, aplicado a uma taxa de 3% em cada período, sob regime de capitalização composta, no momento imediatamente posterior ao 24º depósito.

03 Quanto devo depositar mensalmente para acumular $30.000, após 24 depósitos mensais corrigidos a juros compostos de 1% a.mês?

04 Depositando mensalmente $1.000 em um fundo que rende 1% a.mês, o montante imediatamente após o 20º depósito será de:
A) $24404 B) $24000
C) $22019 D) $22000
E) $22200

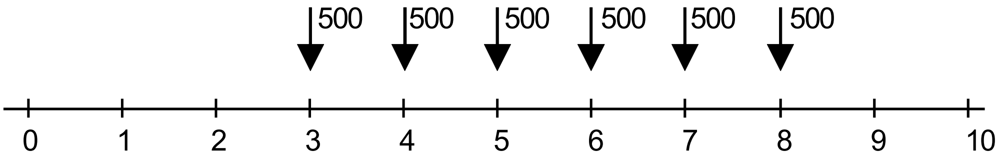
05 ESAF(adaptado) Quanto devo depositar mensalmente para obter um montante de $12.000,ao fim de um ano, sabendo-se que a taxa mensal de remuneração do capital é de 4% e que o primeiro depósito é feito 1 mês após o início da contagem do tempo.
A) 12000 ÷ 15,025805
B) 12000 ÷ (12 x 1,48)
C) 12000 ÷ 9,385074
D) 12000 ÷ (12 x 1,601032)
E) 12000 ÷ 12

06 Quanto será o montante, 1 ano após o 1º depósito, de uma série de capitais constituída por 12 depósitos mensais e constantes de $1.000, a juros compostos de 2% a.mês?

Gabarito

01.33065,95	02.20655,66	03.1112,20
04.C	05.A	06. 13680,33

PANORÂMICA DA SÉRIE DE CAPITAIS



A) Qual o valor único na data 8?
B) Qual o valor único na data 3?
C) Qual o valor único na data 2?
D) Qual o valor único na data 0?

SOLUÇÃO

Gabarito

A=3400,95 B=3749,54 C=2664,73 D=2537,84 E=2301,84

SIGNIFICADO DE *VA*

VA é o **VALOR ÚNICO** de **TODA A SÉRIE DE CAPITAIS** **1 PERÍODO ANTES da 1ª PARCELA**.

Todas as parcelas da ***SÉRIE DE CAPITAIS*** tem seus ***VALORES ATUAIS CALCULADOS NA DATA FOCAL CORRESPONDENTE A UM PERÍODO ANTES DA 1ª PARCELA***.

$$VA = \frac{X \cdot [(\ )^{N} - 1]}{i \cdot (\ )^{N}}$$

ou

$$VA = \frac{X \cdot [1 - (\ )^{-N}]}{i}$$

esta expressão pode ser apresentada da seguinte forma $\boxed{VA = X \cdot a_{n\urcorner\, i}}$

CÁLCULO DAS PARCELAS

$$X = \frac{VA}{a_{n\urcorner\, i}}$$

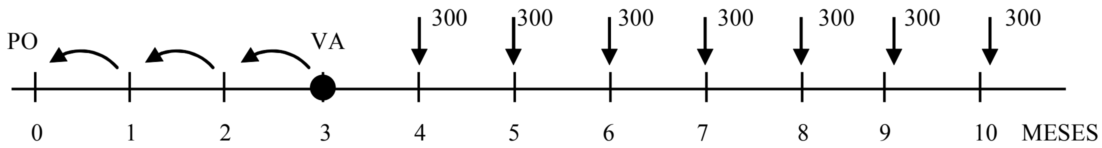
Tabela 5

$$X = VA \cdot \frac{1}{a_{n\urcorner\, i}}$$

Tabela 6

PROBLEMAS PROPOSTOS

01.



i =6 % a.mês

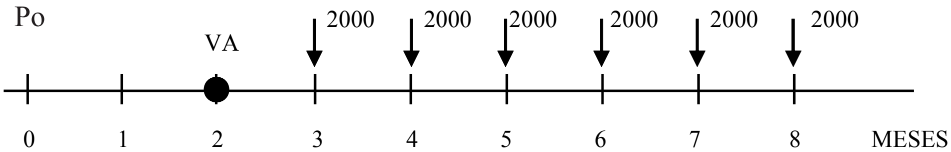
Determine:

A) M na data 10

B) VA na data 3

C)Po na data zero

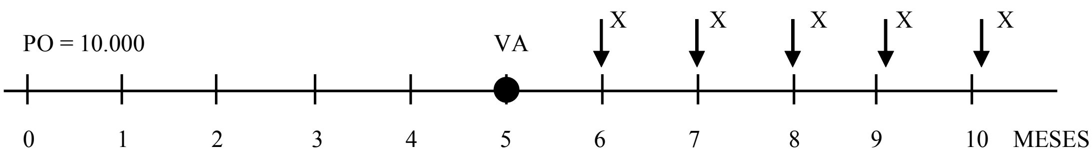
02.



I=5% a.mês

Determine VA e Po

03.

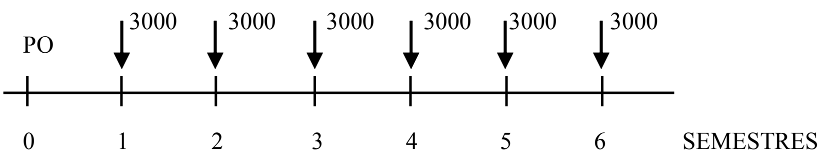


Um produto é vendido à vista por \$10.000.um cliente acerta os pagamentos acima, em parcelas iguais e juros compostos de 2% a.mês.

Determine o valor x:

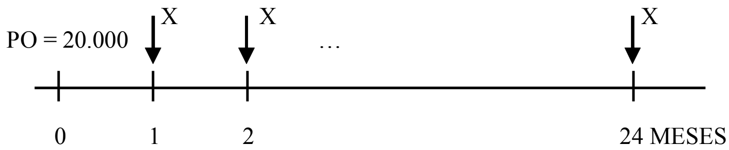
04. Um empréstimo de \$50.000 será pago em 20 parcelas mensais e iguais, sob juros de 4% a.mês, capitalizados mensalmente e o primeiro pagamento é feito no final do 3º mês. Qual o valor da parcela?

05.



Um terreno é comprado em 6 pagamentos semestrais de \$3.000. O primeiro pagamento é feito no final do primeiro semestre. São cobrados juros compostos de 3% a.semestre. Qual o preço à vista?

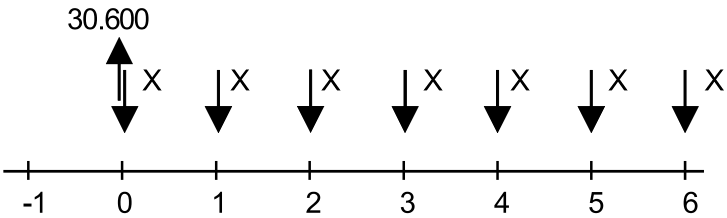
06.



Um carro de $20.000 é vendido em 24 parcelas iguais, mensais imediatas postecipadas, a juros de 1% a.mês

Determine o valor da parcela.

07.



Um produto que custa à vista $30.600 é vendido em 7 parcelas mensais, iguais imediatas e antecipadas (1ª parcela no ato da compra).Determine o valor da parcela para juros compostos de 2% a.mês.

08. Determine o preço à vista de uma mercadoria que é paga em 20 parcelas de $1.000, mensais e iguais, sendo a primeira no ato da compra e juros compostos de 4% a.mês.

09. Determine o número de parcelas em que foi vendido uma casa de $100.000, sabendo-se que a juros de 5% a.semestre o valor de cada parcela ficou $7.800, iguais por semestre, sendo o primeiro pagamento 6 meses após a compra.

Gabarito

01. A) 2518,15 B) 1674,71 C) 1406,12
02. VA = 10151,38 Po = 9207,60
03. VA = 11040,80 X = 2342,42
04. X = 3979,20 05. Po = 16251,57
06. X = 941,40 07. X = 4635,30
08. Po = 14133,94 09. 21 parcelas

TAXA INTERNA DE RETORNO

100.000	11928	11928	...									11928	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	MESES

01. Determine a taxa de retorno de um investimento de \$100.000, recuperado em 12 prestações mensais imediatas postecipadas de \$11.928.

TAXA DE RETORNO É AQUELA EM QUE O VALOR ATUAL DAS RECEITAS É IGUAL AO VALOR ATUAL DAS DESPESAS

ou seja

VPL = 0

VPL= VALOR PRESENTE LÍQUIDO (DE UM FLUXO DE CAIXA)

VPL = VALOR ATUAL DAS RECEITAS – VALOR ATUAL DAS DESPESAS

2. (CEF/ACRE-2008)
A tabela abaixo apresenta o fluxo de caixa de um certo projeto

VALOR (MILHARES DE REAIS)	-50	35	22
PERÍODO (ANOS)	0	1	2

A TAXA INTERNA DE RETORNO é igual a:

A) 10% B) 12% C) 15% D) 18% E) 20%

3. (CESGRANRIO/2008) A tabela abaixo apresenta o fluxo de caixa de um certo projeto

PERÍODO (ANOS)	0	1	2
VALOR (MILHARES DE REAIS)	-410	P	P

Para que a taxa interna de retorno anual seja 5%, o valor de P, em milhares de reais, deve ser

A) 216,5 B) 217,5 C) 218,5 D) 219,5 E) 220,5

4. A tabela apresenta o fluxo de caixa de um certo investimento

VALOR (UNIDADES MONETÁRIAS)	- 20.000	15.000	12.500
PERÍODO (SEMESTRES)	0	1	2

Determine a taxa interna de retorno do investimento

A) 10%
B) 15%
C) 20%
D) 25%
E) 5%

5. Uma alternativa de investimento é composta de um fluxo de caixa com um desembolso de $20.000 no início do primeiro ano, um desembolso de $20.000 no fim do primeiro ano e dez entradas liquidas anuais e consecutivas de $10.000 a partir do fim do segundo ano, inclusive. A uma taxa de 18% a.ano, obtenha o valor desse fluxo de caixa no fim do primeiro ano.

A)24.940,86
B)11.363,22
C)5.830,21
D)4.940,86
E)1.340,86

6. Um empréstimo de $20.900 foi realizado com uma taxa de juros de 36% a.ano, capitalizados trimestralmente, e deverá ser liquidado através do pagamento de 2 prestações trimestrais, iguais e consecutivas (primeiro vencimento ao final do primeiro trimestre, segundo vencimento ao final do segundo trimestre). O valor que mais se aproxima do valor unitário de cada prestação é:

A)$10.350,00
B)$10.800,00
C)$11.881,00
D)$12.433,33
E)$12.600,00

7. (ESAF) Um indivíduo deve $181.500,00 vencíveis em t = 6 meses e $380.666,00 vencíveis em t = 12 meses. Para transformar sua dívida em uma série uniforme de 4 pagamentos trimestrais postecipados em relação a t = 0, a juros compostos de10% a.trimestre, o valor do pagamento trimestral desprezados os centavos é:

A)$102.500
B)$118.207
C)$140.541
D)$136.426
E)$129.343

8. (BB/CESPE 2007) Um empréstimo de $20.000,00 foi concedido à taxa de juros compostos de 6%ao mês. Dois meses após concedido o empréstimo, o devedor pagou $12.000,00 e, no final do terceiro mês, liquidou a dívida. Nessa situação, tomando-se 1,2 como valor aproximado de $(1,06)^3$, conclui-se que esse último pagamento foi superior a $ 11.000,00. (CERTO OU ERRADO)

9. Um fluxo de caixa é composto de 10 desembolsos mensais de $ 1000,00, sendo o primeiro no início do primeiro mês. E de 12 recebimentos mensais de $2000,00, sendo o primeiro no início do 11º mês. Considerando juros compostos de 5% ao mês, determine o VALOR PRESENTE LÍQUIDO deste fluxo de caixa no final do 9º mês (pode aproximar o resultado).

A) 14.000,
B) 13.000,
C) 5148
D) 8685
E) 9980

10. Determine o valor à vista de um imóvel que é pago em 20 parcelas mensais e iguais a $ 5000,00 sendo que a primeira é paga 5 meses após a compra. Considere juros compostos de 1% ao mês.

A) 90.227
B) 100.000
C) 95.000
D) 85.000
E) 86.707

Gabarito

01. 6% 2) A 3) E 4) D 5) E
6) C 7) E 8) CERTO ($11.280,00) 9) C 10) E

CÁLCULO FINANCEIRO

CUSTO EFETIVO DAS OPERAÇÕES DE FINANCIAMENTO, EMPRÉSTIMO e INVESTIMENTO

Consideremos um apartamento que custa à vista \$ 100.000.

Uma pessoa compra este apartamento pagando 24 parcelas mensais de \$ 5.287, sendo a 1ª parcela paga 1 mês após a compra.
Qual o custo real efetivo do financiamento?

ATENÇÃO

Não podemos confundir o ***VALOR NOMINAL*** total pago, que é

24 x \$ 5287 = \$ 126.888 com o ***CUSTO REAL EFETIVO***

SOLUÇÃO

Usando a expressão $\boxed{VA = X \, . \, a_{n \neg i}}$

$$100.000 = 5287 \, . \, a_{n \neg i}$$

$$100.000 = \frac{a_{n \neg i}}{5287}$$

Mas é mais fácil DIVIDIR por 1000.000, então

$$0{,}05287 = \frac{1}{a_{n \neg i}}$$ ***para N = 24 parcelas***

Recorrendo à TABELA FINANCEIRA 6, temos

$$\begin{array}{ccc} & & 2\% \\ & & \uparrow \\ N = 24 & \longrightarrow & \boxed{0{,}05287} \end{array}$$

O CUSTO EFETIVO foi de 2%a.mês

PROVA REAL

Vamos imaginar que o comprador combina para pagar **TODAS** as parcelas na **DATA 24**.
Sobre cada parcela incidirá juros de 2% a.m, compostos.

O valor M a ser pago na data 24 é

$$\boxed{M = \frac{5287\,[(1{,}02)^{24} - 1]}{0{,}02}} \qquad \boxed{M = 160.840{,}37}$$

No entanto, se fizermos 100.000 . $(1{,}02)^{24}$ teremos

$$M = 100.000 \, . \, 1.0684372 \rightarrow \quad M = 160.843{,}72$$

OBS: A diferença se deve ao fato de que a parcela \$ 5287 é um valor "***ARREDONDADO***".

Portanto o custo **REAL EFETIVO** do financiamento foi 60,84% em 2 anos.
O que corresponde a uma **TAXA EFETIVA ANUAL** de

$$(1{,}02)^{12} \rightarrow 1{,}2682$$

26,82%a.ano ***EFETIVO***

ou

$$(x)^2 = 1{,}60843$$

$$x = \sqrt{1{,}60843}$$

$$x = 1{,}2682$$

Testes - Análise de investimentos

01. (TCU) - O preço de uma mercadoria é $ 2.400,00 e o comprador tem um mês para efetuar o pagamento. Caso queira pagar à vista, a loja dá um desconto de 20%. O mercado financeiro oferece rendimento de 35% ao mês. Assinale a opção correta.
(A) A melhor opção é o pagamento à vista.
(B) Não há diferença entre as duas modalidades de pagamento.
(C) No pagamento a prazo, o comprador lucra, no fim do mês, $192,00.
(D) No pagamento a prazo, o comprador lucra, no fim do mês $ 210,00.
(E) No pagamento a prazo, o comprador lucra, no fim do mês, $ 252,00.

02. (CESPE) - Uma escola oferece as seguintes opções para o pagamento da taxa de matrícula, quando efetuada no dia 5 de dezembro:

I - desconto de 10% para pagamento à vista;
II - pagamento em duas vezes, sendo 50% no ato da renovação da matrícula e 50% um mês após, isto é, no dia 5 de janeiro.

Um pai de aluno não quer ter lucro nem prejuízo, optando por qualquer uma das duas modalidades de pagamento, no ato da renovação de matrícula. Para tanto, se optar por II, deve investir a diferença entre os valores que seriam pagos em 5 de dezembro nas modalidades I e II, em uma aplicação financeira com uma taxa mensal de rendimento de:
(A) 5%
(B) 10%
(C) 20%
(D) 25%
(E) 30%

03. (CESPE) - O preço de um televisor de 20 polegadas da marca Alpha é R$ 400,00. O vendedor propõe a um comprador as seguintes alternativas de pagamento:
I - pagamento em 30 dias, com acréscimo de 5% sobre o preço de tabela;
II - pagamento à vista, com 4% de desconto sobre o preço de tabela.
Considere **X** como sendo a diferença entre os preços do televisor para pagamento em 30 dias e para pagamento à vista. Assim, X representa uma porcentagem do preço à vista do televisor igual a:
(A) 9%
(B) 9,25%
(C) 9,375%
(D) 9,5%
(E) 9,725%

04. (CESPE) - Paulo quer comprar um refrigerador e tem as seguintes alternativas:
I - à vista, por R$ 900,00
II - em duas prestações mensais e iguais a R$ 500,00, vencendo a primeira no ato da compra;
III - em três prestações mensais e iguais a R$ 350,00 vencendo a primeira no ato da compra.

Supondo que ele possa aplicar o dinheiro a uma taxa de 4% ao mês, assinale a opção que indica as formas de pagamento, em ordem crescente de vantagem para Paulo.
(A) I - II - III
(B) II - I - III
(C) III - I - II
(D) III - III - I
(E) II - III - I

05. (CESPE) - Fernando possui uma quantia suficiente para adquirir um aparelho de som, mas a loja oferece três formas diferentes de pagamento:

I - à vista, com 20% de desconto;

II - em duas prestações mensais e iguais, com 10% de desconto, vencendo a primeira um mês após a compra;

III - em três prestações mensais e iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

Admitindo que a taxa de rendimento das aplicações financeiras seja de 3% ao mês, assinale a opção que indica as escolhas que Fernando pode fazer, em ordem decrescente de vantagem para ele, isto é, da mais vantajosa para a menos vantajosa.

(A) I - II - III
(B) I - III - II
(C) II - III - I
(D) III - I - II
(E) III - II - I

06. (CESPE) - Julgue os itens que se seguem

(1) Um bem pode ser adquirido por 100 reais à vista ou em 2 (duas) prestações fixas de 60 reais, a primeira devida no ato da compra. Para o comprador, a segunda opção será melhor que a primeira somente quando a taxa de juros mensal for maior que 50%.

(2) Pressupondo que o mercado imobiliário esteja em equilíbrio e que a taxa de juros real seja de 10% ao ano e seja constante, o proprietário de um imóvel que conseguir 1.200 reais, líquidos, de aluguel por ano, terá prejuízo se vender seu imóvel por quantia inferior a 1220.00 reais (considere que o aluguel possa manter-se constante durante toda a vida do proprietário).

(3) Será indiferente, para um investidor, uma aplicação, com vencimento em 2 (dois) anos, que lhe renda juros simples anuais de 10% e outra, com idêntico prazo de maturação, que lhe renda juros compostos de 8% ao ano, capitalizados anualmente.

(4) Se em dado momento a importância de 100 reais é aplicada a juros compostos de 4% ano a ano, capitalizados anualmente, ao final de 2 (dois) anos terá rendido a importância de 8,16 reais de juros.

(5) Um demógrafo deseja determinar em que ano a população de certo país dobrará. Pressupondo que a taxa de crescimento demográfico seja constante e igual a 2% anuais, o demógrafo terá de calcular o valor da razão $\frac{\log(1,02)}{\log 2}$.

07. (CESPE) - Uma alternativa de investimento possui um fluxo de caixa com um desembolso de R$ 10.000,00, no inícvio do primeiro mês, outro desembolso, de R$ 5.000,00 ao final do primeiro mês, e duas entradas líquidas de R$ 11.000,00 e R$ 12.100,00, no final do segundo e do terceiro meses, respectivamente. Considerando uma taxa nominal de juros de 120% ao ano, julgue os itens a seguir.

(1) As taxas anuais, tanto efetivas quanto nominais, têm o mesmo significado e assumem valores iguais quando se trata de fluxo de caixa.

(2) Os valores atuais de entradas líquidas, no fim do primeiro mês, somam R$ 20.000,00.

(3) A soma dos montantes dos desembolsos, no fim do terceiro mês, é exatamente igual a R$ 19.000,00.

(4) O valor atual do fluxo de caixa, no fim do primeiro mês, é igual a R$ 4.000,00.

(5) No fim do terceiro mês, o montante do fluxo de caixa é negativo.

Gabarito

01. C **02. D** **03. E** **04. D**
05. A
06. E - E - E - C - E
07. E - C - E - C - E

SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Toda vez que contrairmos uma DÍVIDA, optamos por um sistema de pagamento que nos permita AMORTIZAR essa dívida, ou seja, DIMINUIR EFETIVAMENTE O MONTANTE DA DÍVIDA ATÉ QUITÁ-LA e, ainda PAGAR OS JUROS decorrentes dessa dívida.

Existem muitas maneiras de quitar uma dívida. Nos empréstimos a CURTO PRAZO (inferiores a um ano), é comum utilizar-se JUROS SIMPLES. Já nos empréstimos a LONGO PRAZO (prazo superior a um ano) sempre se utilizam os JUROS COMPOSTOS.

Em ambos os casos, os JUROS e a AMORTIZAÇÃO propriamente dita, podem ser pagos de diferentes maneiras. Ao efetuarmos um conjunto de pagamentos para quitar uma dívida, os **juros** podem ser cobrados antecipadamente, ao longo do período estabelecido para quitá-la ou no final do prazo. A **amortização** efetiva da dívida também pode ser feita parceladamente ou no final do prazo acordado.

Os sistemas de amortização mais conhecidos são os seguintes:

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO PROGRESSIVA – SISTEMA FRANCÊS OU SISTEMA PRICE

Neste sistema a DÍVIDA é QUITADA através de um conjunto de pagamentos de **N** termos de uma **RENDA IMEDIATA POSTECIPADA**.

Cada termo da renda (prestação) contém 2 partes:

Uma parte do valor destina-se ao pagamento dos JUROS e outra parte serve para DIMINUIR o montante da dívida, ou seja, para AMORTIZÁ-LA.

Neste sistema, todos os pagamentos são **IGUAIS** e periódicos. Embora o valor desse pagamento seja CONSTANTE, na medida que o saldo devedor vai ficando menor, os juros embutidos em cada parcela diminuem e, automaticamente aumenta o VALOR AMORTIZADO em cada parcela.

EXEMPLO ALEATÓRIO

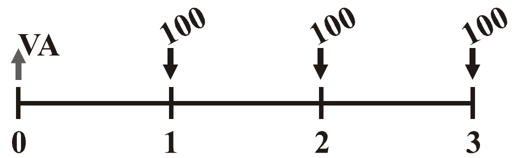
DÍVIDA PAGA EM 3 PARCELAS DE $ 100

	VALOR DA PARCELA	JUROS	AMORTIZAÇÃO
1ª PARCELA	100	40	60
2ª PARCELA	100	30	70
3ª PARCELA	100	10	90

Evidentemente, $ 300 correspondem ao VALOR INICIAL da dívida (VA na data ZERO) acrescidos dos JUROS.

O valor realmente emprestado foi INFERIOR A $ 300

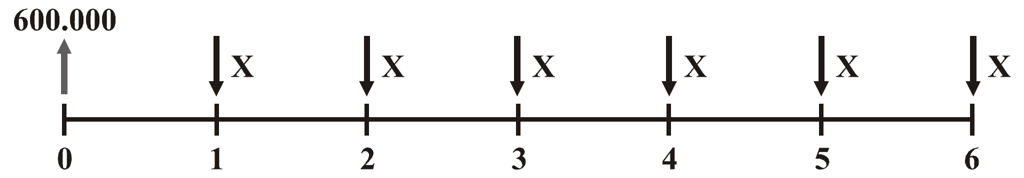
ESQUEMATICAMENTE:



EXEMPLO REAL

Seja uma dívida de $ 600000, que deverá ser quitada em 6 parcelas imediatas postecipadas, anuais, consecutivas, periódicas e constantes, pelo sistema PRICE, a uma taxa de 10% a.a.

Como já estudamos, o esquema é o seguinte:



onde **X** e o valor de cada parcela.

$$\boxed{VA \cdot (1 + i)^n = \frac{X \cdot [1(1 + i)^N - 1]}{i}}$$

$$600000 \cdot (1{,}1)^6 = \frac{X \cdot [(1{,}1)^6 - 1]}{0{,}1}$$

Isolando X, obtemos:

$$\boxed{X = 137.764{,}43}$$

CÁLCULO DOS JUROS E DA AMORTIZAÇÃO

Os JUROS são sempre cobrados sobre o SALDO DEVEDOR, ou seja, MONTANTE QUE AINDA É DEVIDO EM CADA DATA.

Portanto, na data do 1º pagamento (DATA UM), os juros incidem sobre VALOR ORIGINAL DA DÍVIDA, ou seja, sobre o VA na **DATA ZERO** – que corresponde a TODA a dívida.

Como nessa **DATA UM**, uma parte do pagamento serve para amortizar a dívida, o SALDO DEVEDOR diminui. Quando chegamos na **DATA DOIS**, os juros embutidos no 2º pagamento serão menores, pois eles serão calculados sobre o saldo devedor na DATA UM e assim sucessivamente.

No caso do nosso problema:

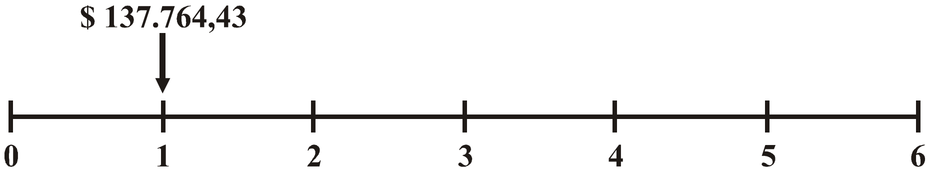
DATA UM

JUROS NA DATA UM

Juros de 10% sobre o VA

$$J_1 = 0{,}1 \cdot (600000)$$

$$\boxed{J_1 = s\ 600000}$$



Ora, se o valor pago na data um foi $ 137764,43 e $ 60000 correspondem aos **JUROS**, o restante corresponde a AMORTIZAÇÃO.

AMORTIZAÇÃO NA DATA UM

$Am_1 = 137.764,43 - 60000$

$$\boxed{\mathbf{Am_1 = 77764,43}}$$

SALDO DEVEDOR NA DATA UM

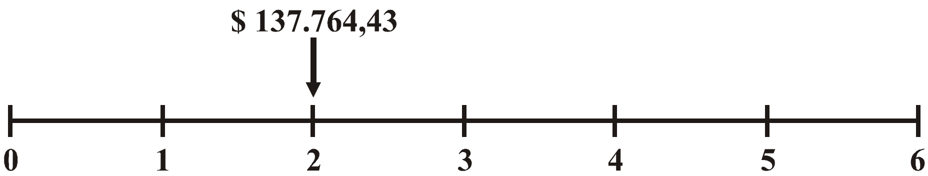
Pelo cálculo exposto anteriormente vem que o **SALDO DEVEDOR** corresponde ao MONTANTE **ATUAL** DA **DÍVIDA** em cada data.

$SD_1 = 600000 - 77764,43$ (valor amortizado)

$$\boxed{\mathbf{SD_1 = \$\ 552235,57}}$$

Portanto, na **DATA UM** a dívida fica diminuída para o valor acima e é sobre o SD_1 que serão calculados os JUROS NA **DATA DOIS**.

DATA DOIS



JUROS PAGOS NA DATA DOIS

$J_2 = 0,1 \cdot (522235,57)$

$$\boxed{\mathbf{J_2 = 52223,56}}$$

AMORTIZAÇÃO NA DATA DOIS

$Am_2 = 137764,43 - 52223,56$

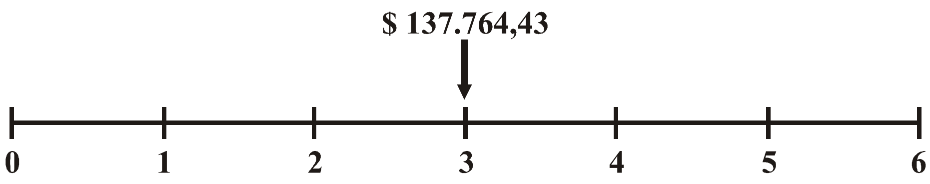
$$\boxed{\mathbf{Am_2 = \$\ 85540,87}}$$

SALDO DEVEDOR NA DATA DOIS

$SD_2 = 522.235,57 - 85.540,87$

$$\boxed{SD_2 = \$\ 436.694,70}$$

DATA TRÊS



JUROS PAGOS NA DATA TRÊS

10% sobre o saldo devedor na data DOIS (data anterior)

$J_3 = 0,1 \cdot (436694,70)$

$$\boxed{J_3 = 43669,47}$$

AMORTIZAÇÃO NA DATA TRÊS

$Am_3 = 137764,43 - 43669,47$

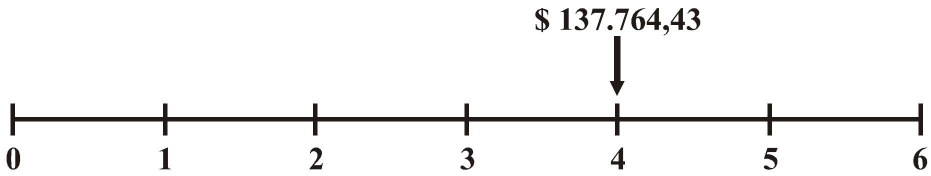
$$\boxed{Am_3 = 94094,96}$$

SALDO DEVEDOR NA DATA TRÊS

$SD_3 = 436694,70 - 94094,96$

$$\boxed{SD_3 = \$\ 342599,74}$$

DATA QUATRO



JUROS PAGOS NA DATA QUATRO

10% sobre o SD_3

$J_4 = 0,1 \cdot (342599,74)$

$\boxed{J_4 = 34259,97}$

AMORTIZAÇÃO NA DATA QUATRO

$Am_4 = 137764,43 - 34259,97$

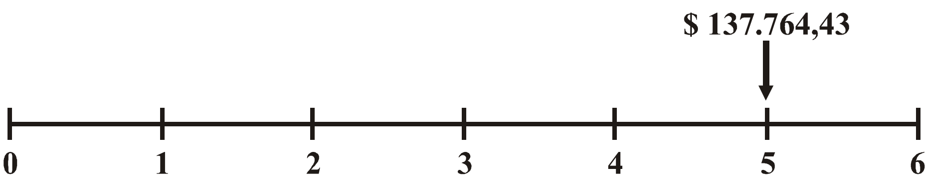
$\boxed{Am_4 = 103504,46}$

SALDO DEVEDOR NA DATA QUATRO

$SD_4 = SD_3 - Am_4$

$\boxed{SD_4 = 239095,51}$

DATA CINCO



JUROS PAGOS NA DATA CINCO

$J_5 = 0,1 \cdot (239095,51)$

$$\boxed{\mathbf{J_5 = 23909,55}}$$

AMORTIZAÇÃO NA DATA CINCO

$Am_5 = 137764,43 - 23909,55$

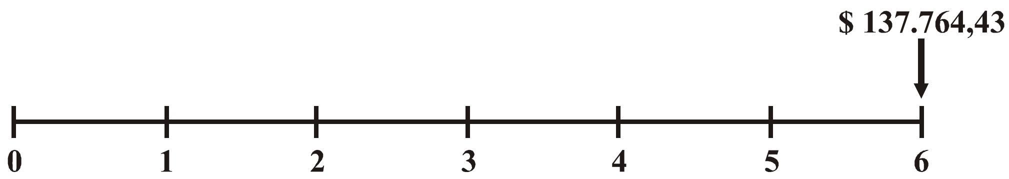
$$\boxed{\mathbf{Am_5 = 113.854,88}}$$

SALDO DEVEDOR NA DATA CINCO

$SD_5 = 239095,51 - 113854,88$

$$\boxed{\mathbf{SD_5 = 125240,63}}$$

DATA SEIS



JUROS PAGOS NA DATA SEIS

$J_6 = 0,1 \cdot (125240,63)$

$$\boxed{J_6 = 12524,06}$$

AMORTIZAÇÃO NA DATA SEIS

$Am_6 = 137764,43 - 12524,06$

$$\boxed{Am_6 = 125240,37}$$

SALDO DEVEDOR NA DATA 6

$SD_6 = 125240,63 - 125240,37$

$$\boxed{SD_6 = 0,26 \cong \text{ZERO}}$$

A DIFERENÇA DEVE-SE AOS ARREDONDAMENTOS

TABELA

PARCELA	VALOR DA PARCELA	JUROS	AMORTIZAÇÃO	SALDO DEVEDOR
–	–	–	–	600000
1ª PARCELA	137764,43	60000	77764,43	552235,57
2ª	137764,43	52233,56	85540,87	436694,70
3ª	137764,43	43669,47	94094,96	342599,74
4ª	137764,43	34259,97	103504,46	239095,51
5ª	137764,43	23909,55	113854,88	125240,63
6ª	137764,43	12524,06	125240,37	0,26 ≅ ZERO
TOTAIS	826586,58	226586,61	599999,97	

OBSERVAÇÃO:

ANÁLISE DIRETA EM CADA DATA

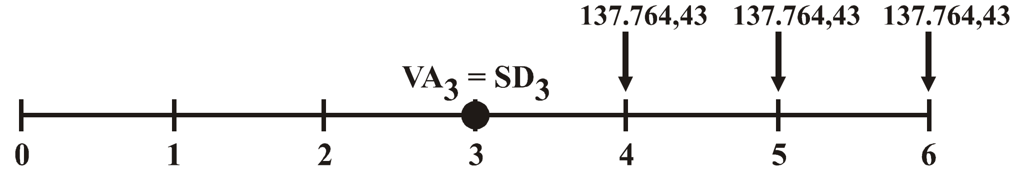
Para analisar cada data **DIRETAMENTE**, basta achar o **SALDO DEVEDOR** na data imediatamente anterior.

EXEMPLO Considerando o exemplo anterior:

Determinar os juros e a amortização no 4º pagamento.

1º PASSO Vamos determinar o **SALDO DEVEDOR NA DATA TRÊS**, ou seja, **APÓS PAGAR A 3ª PARCELA** e **ANTES DE PAGAR A 4ª PARCELA**.

O saldo devedor na data três é o **VALOR ATUAL** na data três (VA_3) das parcelas que **FALTAM PAGAR** (no caso, 4ª, 5ª e 6ª).



Com já estudamos

$$\boxed{VA = X \cdot a_{\overline{n}|i}}$$

3 parcelas que faltam pagar

$$VA = \frac{137764{,}43 \cdot [(1{,}1)^3 - 1]}{0{,}1 \cdot (1{,}1)^3}$$

3 períodos que restam do prazo

$$\boxed{VA = \$\ 342599{,}75 = SD_3}$$

2º PASSO — **JUROS PAGOS NA DATA QUATRO**

10% sobre o SD_3

$$\boxed{J_4 = 34259{,}97}$$

3º PASSO — **AMORTIZAÇÃO NA DATA QUATRO**

$AM_4 = 137764{,}43 - 34259{,}97$

$$\boxed{AM_4 = 103504{,}46}$$

RESUMOS

CÁLCULO DO SALDO DEVEDOR

É o valor atual (usando a tabela PRICE) das parcelas que FALTAM PAGAR.

$$\boxed{VA = X \cdot a_{\overline{n}|i}}$$ *n = número de parcelas que faltam pagar*

ou **MONTANTE INICIAL DA DÍVIDA - VALOR JÁ AMORTIZADO**

JUROS EM CADA PARCELA

É calculado sobre o SALDO DEVEDOR $J_n = i \cdot SD_{n-1}$

AMORTIZAÇÃO EM CADA PARCELA

TOTAL X da PARCELA - JUROS

$$\boxed{AM = X - J}$$

1ª PARCELA DE AMORTIZAÇÃO

$$\boxed{AM = X - i \cdot VA_O}$$

MONTANTE JÁ AMORTIZADO

1º MÉTODO ⇒ DÍVIDA INICIAL - SALDO DEVEDOR

parcelas já pagas

$$2^o \text{ MÉTODO} = M_{am} = \frac{(1^o\ Am) \cdot [(\ \ )^N - 1]}{i}$$

AMORTIZAÇÃO EM CADA PARCELA A PARTIR DO CONHECIMENTO DA 1º AMORTIZAÇÃO

As parcelas de amortização formam uma PG de mesma razão **i** e 1º termo a_1 da PG correspondendo a 1ª parcela da amortização

NO EXEMPLO DADO

$$AM_5 = Am_1 \cdot (1{,}1)^4$$
$$AM_5 = 77764{,}43 \cdot (1{,}1)^4$$

$$\boxed{AM_5 = 113854{,}90}$$

PROBLEMA

Um financiamento de $100000 deve ser amortizado em 10 pagamentos mensais iguais, imediatos, postecipados a uma taxa de 24% a.a. Pede-se:

a) Valor da prestação:
b) Juros na 1ª parcela:
c) Amortização no 1º pagamento:
d) Saldo devedor após 7º pagamento:
e) Juros na 4º parcela:
f) 5º quota de amortização:
g) Amortização acumulada entre a 5º e 8ª parcela, incluindo ambas as parcelas:
h) Juros acumulados até a 3ª parcela (inclusive):
i) Montar planilha de amortização:

Gabarito

a) $11.133,00 b)$ 2000,00 c) $9133,00 d) $ 32105,35
e) $ 1440,99 f) $ 9885,85 g) $ 40745,61 h) $ 5448,37
i)

SALDO DEVEDOR INICIAL	PARCELA	JUROS	AMORTIZAÇÃO	SALDO DEVEDOR APÓS PGTO
100.000	11133	2000	9133	90867
	11133	1817,34	9315,66	81551,43
	11133	1631,03	9501,97	72049,37
E ASSIM SUCESSIVAMENTE				

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE – SAC

Pelo SAC, o valor correspondente à amortização em CADA PARCELA é CONSTANTE e os juros incidem sobre o saldo devedor. Como o saldo devedor diminui após o pagamento de cada prestação e a amortização é constante, o VALOR DA PRESTAÇÃO REDUZ-SE AO LONGO DO TEMPO.

O VALOR DA AMORTIZAÇÃO DO EMPRÉSTIMO EM CADA PARCELA É CALCULADO DIVIDINDO O PRINCIPAL EMPRESTADO PELO NÚMERO DE PRESTAÇÕES.

EXEMPLO

Dívida de $ 120000, quitada em 3 parcelas anuais a 10% a.a.

	SALDO DEVEDOR	**AMORTIZAÇÃO**	**JUROS**	**VALOR DA PARCELA**
–	120000	–	–	–
1º PAGAMENTO	80000	40000	12000	52000
2º PAGAMENTO	40000	40000	8000	48000
3º PAGAMENTO	–	40000	4000	44000

1º PASSO Cálculo da amortização: Am $= \frac{120000}{3} = 40000$

2º PASSO JUROS NO 1º PAGAMENTO:
10% sobre 120000 = 12000

3º PASSO CÁLCULO DO 1º PAGAMENTO
40000 + 12000 = 52000

E assim sucessivamente.

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTO – SAM

Pelo SAM, a prestação é calculada pela MÉDIA ARITMÉTICA da prestação obtida pelo sistema PRICE e pelo SAC.

EXEMPLO No caso anterior, se calcularmos a prestação pelo sistema PRICE, encontramos **X = 48254**. Então

	SAC	PRICE	SAM
1ª	52000	48254	50127
2ª	48000	48254	48127
3ª	44000	48254	46127

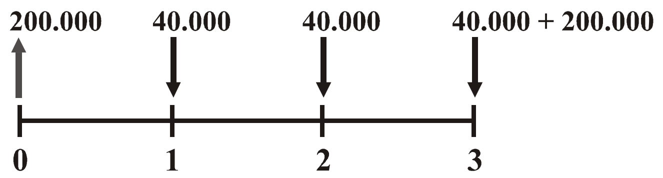
CÁLCULO DA 1ª PARCELA SAM $\Rightarrow \dfrac{52000 + 48254}{2} = 50127$

SISTEMA AMERICANO

São cobrados juros SIMPLES periodicamente sobre o CAPITAL INICIAL e o principal é pago na última parcela.

EXEMPLO

Empréstimo de $ 200000 a juros de 20% a.a. durante 3 anos.



SINKING FUND

Não deve ser confundido com o sistema Americano. O que ocorre é que é comum aliar a prática do "sinking fund" ao sistema americano. O tomador aplica periodicamente um valor X, no mercado de capitais para constituir o montante necessário na data da amortização do principal no sistema Americano.

SISTEMA DE JUROS ANTECIPADOS

Comum nas operações de curto prazo. É, de fato, a única forma de financiamento a juros smples praticado atualmente no mercado financeiro brasileiro.

É o que ocorre no desconto de duplicatas. O comerciante entrega duplicatas com valor de face de $120000 com vencimento para 4 meses, por exemplo.

Considerando uma taxa simples, de 5% a.mês, agará 20% de juros. esse valor, $24000 é descontado no momento do negócio, de maneira que na verdade o comerciante recebe $96000 pelos títulos. No vencimento, o banco recebe o valor de face.

O ganho efetivo do banco será $\dfrac{120000}{96000} = 1{,}25 \Rightarrow 25\%$

MÉTODO ALEMÃO OU HAMBURGUÊS

Consideremos um capital **C**, emprestado em uma data **ZERO**. O tomador, no entanto, não leva integralmente esse valor pois, no ato da negociação, antecipa-se a cobrança dos juros calculados sobre o saldo devedor na **DATA UM**. A dívida é **C** mas o tomador só recebe (**C - J_1**).

Essa dívida será paga em **n** parcelas **IGUAIS**.

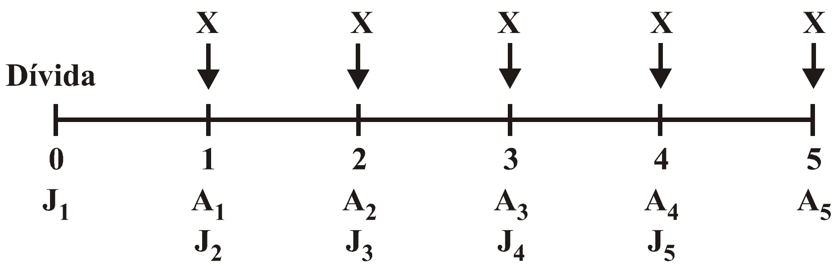
A amortização em cada parcela vai aumentando progressivamente e os juros vão diminuindo.

Na última parcela, não haverá juros, pois eles são pagos sempre antecipadamente.

Na **DATA UM** paga-se a primeira amortização e os juros sobre o saldo devedor na **DATA DOIS**. Na **DATA DOIS** paga-se a segunda amortização e os juros sobre o saldo devedor na **DATA TRÊS** e assim sucessivamente.

EXEMPLO

Dívida **C**, paga em **5 parcelas iguais**



Observe que:

- A dívida é paga em 5 parcelas iguais a X.
- Na última parcela só ocorre amortização.

Generalizando, para uma dívida paga em **n** parcelas:

DATA UM $\quad$ 1ª parcela $\rightarrow T_1 = A_1 + \underbrace{i \cdot (C - A_1)}_{J_2}$ saldo devedor na data um

DATA DOIS $\quad$ 2ª parcela $\rightarrow T_2 = A_2 + \underbrace{i \cdot (C - A_1 - A_2)}_{J_3}$

Ora, $T_1 = T_2$, então:

$$A_1 + i \cdot (C - A_1) = A_2 + i \cdot (C - A_1 - A_2)$$
$$A_1 + i \cdot C - i \cdot A_1 = A_2 + i \cdot C - i \cdot A_1 - i \cdot A_2$$

$$\boxed{A_1 = A_2 \cdot (1 - i)}$$

Repetindo a operação encontramos:

$$a_2 = a_3 \cdot (1 - i)$$
$$a_3 = a_4 \cdot (1 - i)$$

Ou ainda:

$$a_2 = \frac{a_1}{(1 - i)} \qquad a_3 = \frac{a_2}{(1 - i)} \qquad a_4 = \frac{a_3}{(1 - i)}$$

Trata-se de uma **PG** de razão $\frac{1}{(1 - i)}$

Portanto, $\mathbf{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$ fórmula da PG

$$\boxed{\mathbf{a_n = \frac{a_1}{(1 - i)^{n-1}}}}$$ **1ª CONCLUSÃO**

Ora, a última parcela é o próprio valor **X**, portanto

$$\mathbf{X = \frac{a_1}{(1 - i)^{n-1}}}$$

Vamos, porém, isolar a_1 na 1ª PARCELA (DATA UM)

$$X = a_1 + i \cdot (C - a_1)$$
$$X = A_1 + i \cdot C - i \cdot a_1$$
$$X - i \cdot C = a_1 - i \cdot a_1$$

Colocando $\mathbf{a_1}$ em evidência, temos:

$$X - i \cdot C = a_1 \cdot (1 - i)$$

Isolando $\mathbf{a_1}$, obtemos:

$$\boxed{\mathbf{a_1 = \frac{X - i \cdot C}{(1 - i)}}}$$ **1ª amortização**

Voltando a equação que denominamos 1ª conclusão:

$$\mathbf{X = \frac{a_1}{(1 - i)^{n-1}}}$$

Substituindo nesta equação $\mathbf{a_1}$ por $\mathbf{\frac{X - i \cdot C}{(1 - i)}}$

$$X = \frac{\frac{X - i \cdot C}{(1 - i)}}{(1 - i)^{n-1}}$$ Dividindo as frações

$$X = \frac{X - i \cdot C}{(1 - i)} \cdot \frac{1}{(1 - i)^{n-1}}$$

$$X = \frac{X - i \cdot C}{(1 - i)^n}$$

$$X \cdot (1 - i)^n = X - i \cdot C$$

$$i \cdot C = X - X \cdot (1 - i)^n$$

Colocando a parcela constante **X** em evidência:

$$i \cdot C = X \cdot [1 - (1 - i)^n]$$

Portanto

$$\boxed{X = \frac{i \cdot C}{1 - (1 - i)^n}}$$

*que é a fórmula para calcular o valor constante das **n** parcelas.*

PROBLEMA

Um empréstimo de $ 54200 é negociado pelo sistema alemão a uma taxa de 10% a.a. para ser pago em 3 parcelas. Calcule o valor **X** da parcela:

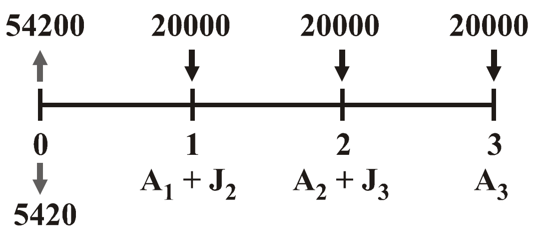
SOLUÇÃO

C = 54200
i = 10% a.a $\Rightarrow$ 0,1
n = 3
X = ?

$$\boxed{X = \frac{i \cdot C}{1 - (1 - i)^n}}$$

$$X = \frac{0{,}1 \cdot (54200)}{1 - 0{,}729}$$

$$\boxed{X = 20000}$$



Para calcular a 1ª parcela de amortização, fazemos:

$$a_1 = \frac{X - i \cdot C}{(1 - i)} \qquad a_1 = \frac{20000 - 5420}{0{,}9} \qquad \boxed{a_1 = 16200}$$

$$\boxed{a_2 = \frac{a_1}{(1 - i)}}$$ e assim por diante

PARCELA	JUROS	AMORTIZAÇÃO	SALDO DEVEDOR
0	J1 = 5420	-	54200
1	J2 = 3800	$a_1 = 16200$	38000
2	J3 = 2000	$a_2 = 18000$	20000
3	-	$a_3 = 20000$	

PLANO LIVRE DE AMORTIZAÇÃO

A amortização é livre e paga-se, em cada entrega, os juros sobre o saldo devedor.

EXEMPLO

Uma dívida de $100000 será paga em 4 meses com parcelas variáveis.
Taxa de 5% a.mês.

1º MÊS

Amortização → $ 15000
juros sobre o saldo devedor → $ 5000
valor pago $ 20.000

2º MÊS

Amortização → 40000
juros sobre o saldo devedor → 0,05 · (85000) = $ 4250
TOTAL PAGO → $ 44250

3º MÊS

Amortização → 25000
juros sobre o saldo devedor → $ 2250
TOTAL PAGO → $ 27250

4º MÊS

Amortização → 20000
juros sobre o saldo devedor → $ 1000
valor pago $ 21.000

n	Amortização	Juros	Valor da parcela	Saldo devedor
0	–	–	–	100000
1	15000	5000	20000	85000
2	40000	4250	44250	45000
3	25000	2250	27250	20000
4	20000	1000	21000	ZERO

PROBLEMA PROPOSTO

(AFNT/85) - Uma pessoa obteve um empréstimo de $120000 a uma taxa de juros compostos de 2% a.m. que deverá ser pago em 10 parcelas iguais.
O valor dos juros a ser pago na 8ª parcela é de
a) $ 5 b) $ 51 c) $ 518 d) $ 5187 e) $ 770

RESPOSTA: E

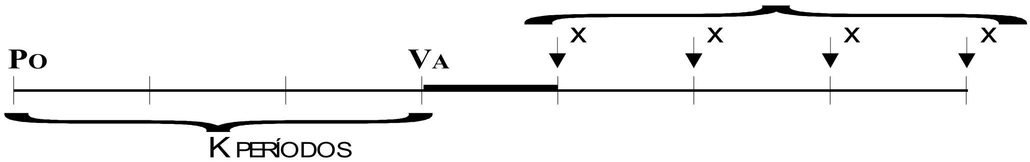
RESUMO DE RENDAS

$$M = X.s_{\overline{n}|i} \text{ ou } M = X.\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

M = Montante de "**n**" pagamentos a uma taxa " **i** " expressa na forma decimal *IMEDIATAMENTE* após o último depósito.

OBS. Se após o último deposito o dinheiro continua depositado ele continuará rendendo *JUROS COMPOSTOS* como se o montante **M** fosse o capital inicial de um único deposito Cuja data zero é a mesma do último depósito.

$\boxed{VA = X.a_{\overline{n}|i}}$ Única fórmula para todos os tipos de renda, desde que seja entendido que VA é o valor atual de "**n**" depósitos a uma taxa " **i** " no instante IMEDIATAMENTE ANTERIOR (1 período antes) do 1º pagamento.



PO = Preço à vista na data zero ou valor financiado.

VA = Valor (1 período antes da data do 1º pagamento) de "n" parcelas iguais e consecutivas

RELAÇÃO ENTRE PO e PA $\Rightarrow$ $\boxed{VA = PO.(1+i)^k}$

"Para ir de PO até VA ⇒ EMBUTE

Para voltar de VA até PO ⇒ DESEMBUTE"

OUTRAS EXPRESSÕES EQUIVALENTES

$$VA = \frac{X.[(1+i)^n - 1]}{i.(1+i)^n} \qquad X = VA \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

$$X = \frac{VA}{a_{\overline{n}|i}}$$

RESUMO DE TAXAS

$\boxed{(1+i)^n = \text{TAXA EFETIVA}}$ *Relação entre taxa nominal " **i** " e taxa efetiva*

interpretada a partir do "balconista"

Exemplo

A taxa nominal de 10% a.trimestre com capitalização trimestral tem a seguinte taxa efetiva anual.

$(1{,}1)^4 = tx.efet.$

$\underbrace{1{,}4641}$ *interpretando* $\Rightarrow$ *46,41a.a efetivo*

TAXAS EQUIVALENTES

$(1 + i_1)^{n_1}$

$(1 + i_2)^{n_2}$

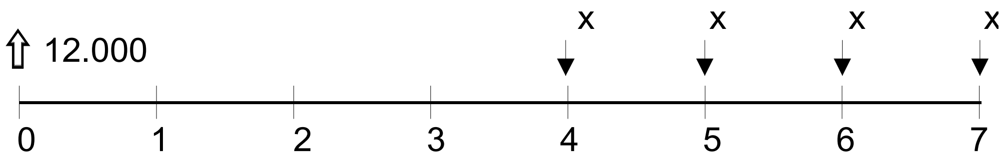
mesma tx. efetiva

$$(1 + i_1)^{n_1} = (1 + i_2)^{n_2}$$

Taxas equivalentes são aquelas que por caminhos diferentes produzem o **mesmo** crescimento efetivo do capital.

PROBLEMAS DE RENDAS

01.

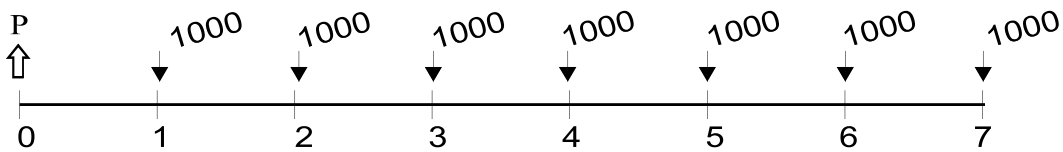


Um financiamento de $12.000, tomado na data zero, é em 4 parcelas mensais, iguais e consecutivas, sendo a 1ª paga no final do 4º mês. Sendo a taxa de 24% a.a com capitalização mensal, determine o valor da parcela.

02.

Um carro de $20.600 é comprado na data zero. O pagamento é feito através de 8 parcelas, mensais, iguais e consecutivas sendo a primeira no ato da compra. Tomando como base uma taxa de 3%a.m de juros compostos, calcule o valor da parcela.

03.



Uma mercadoria cujo preço á vista (na data zero) é P, é paga em 7 parcelas mensais, iguais e consecutivas, sendo a 1ª parcela paga 1 mês após a compra(imediata postecipada). Se o valor de cada parcela é $1000 e os juros compostos de 5%a.mês, calcule o preço à vista de P.

04.

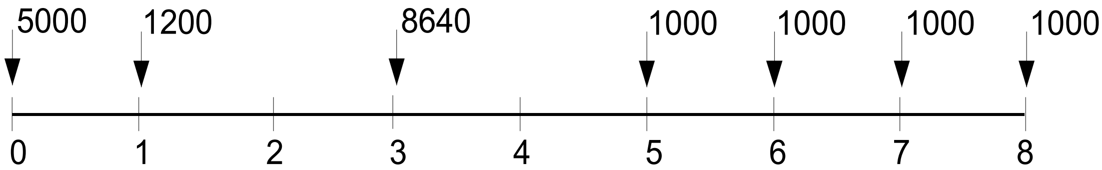
Uma mercadoria de preço à vista P é paga da seguinte forma:

a) $ 3000, 1 mês após a compra.

b) $ 5000, 2 meses após a compra

c) 6 pagamentos mensais, iguais, consecutivos de $ 2000, sendo o 1º desta série uniforme feito no final do 4º mês. Considerando i = 10% a.m, determine o preço P.

05.



Uma mercadoria de preço P na data zero, é paga da seguinte forma:

- ***Ato da compra ⇒ $ 5000.***
- ***1 mês após a compra $ 1200.***
- ***3 meses após a compra $8640.***
- ***E mais 4 parcelas mensais, consecutivas, iguais a $ 1000, sendo a primeira no final do 5º mês.***

Considerar juros compostos de 20 a.mês.

Qual o preço P?

06.

Um empréstimo de $ 60.000 na data zero, é pago da seguinte forma:

a) $22.050 no final do 2º mês.

b) Série de 5 pagamentos mensais, iguais e consecutivos, sendo o primeiro no final do 4º mês.

Considerando a taxa de juros compostos de 5%a.mês, calcule o valor x de cada parcela da série uniforme.

07.

Uma mercadoria de preço P, na data zero, é paga em 5 parcelas imediatas ANTECIPADAS, de $1000. Calcule o preço P para uma taxa composta de 4%a.mês.

08.

Um bem de valor P na data zero, é pago de acordo com o fluxo de caixa da figura. Considerando juros compostos de 10%a.mês, calcule o valor P.

09.

A mercadoria de preço P é paga de acordo com o fluxo de caixa acima. Considerado uma taxa de juros compostos de 3%a.mês, determine P.

10.

Uma compra no valor de 1.000.000,00 é paga com uma entrega de R$ 667.093,14 no final do 2º mês a partir da data do negócio e 4 parcelas mensais iguais a partir do ínicio do 5º mês.

Considerando uma taxa composta de 2% a.m., determine o valor da X parcela de rendas certas.

RENDAS - SOLUÇÕES

1) VA é o valor atual 1 PERÍODO antes do 1º págamento. Portanto o 1º passo é **"embutido"** *o preço até a DATA TRÊS.*

$12.000 \,.\, (1{,}02)^3 = VA$

$VA = 12.734{,}50$

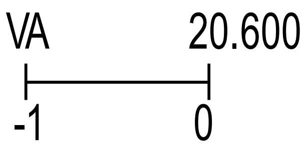
$VA = x.a_{\overline{n|}i}$

$12.734{,}50 = x.a_{\overline{4|}2\%}$

$x = 12.734{,}50 \times \dfrac{1}{a_{\overline{4|}2\%}}$

$x = 12734{,}50 \times 0{,}26262$

$x = 3344{,}34$

2) 

Vamos "desembutir" VA para a data "1 período" antes do 1º pagamento

$VA = \dfrac{20.600}{1{,}03}$

$VA = 20.000$ $\qquad$ $VA = x.\, a_{\overline{8|}3}$

Resolva você apartir daqui.

3) $P = VA$ *(imediata postecipada)*

$P = 1000.a_{\overline{7|}5\%}$ *Resolva você!*

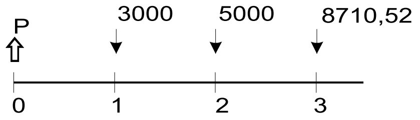
4) A série uniforme nos dá VA na data três.

$VA = 2000.a_{\overline{6|}10\%}$

$VA = 2000.\ 4{,}35526$

$VA = 8710{,}52$

Nosso fluxo de caixa fica:



Agora, devemos "desembutir" até a data zero pelo critério do desconto racional composto

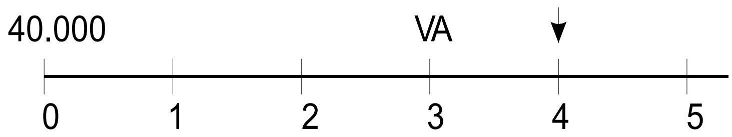
$$P = \frac{3000}{1,1} + \frac{5000}{1,21} + \frac{8710,52}{(1,1)^3}$$

5)

$$P = 5000 + \frac{1200}{1,2} + \frac{8640}{(1,2)^3} + \frac{VA}{(1,2)^4}$$

6) $60.000 - \frac{22.050}{(1,05)^2} =$ *saldo devedor na data zero*

60.000 - 20000 = 50
40.000 é saldo em zero



VA = 40.000 "embutido" 3 meses
$VA = 4.000 \,.\, (1,05)^3$

$46305 = x.a_{\overline{5}|5}$ *Resolva!*

7) *P = 1000 + VA de 4 pagamentos*
$P = 1000 + x.a_{\overline{4}|4}$
P = 1000 + 1000.3,6299
P = 4629,90

8) $P = \frac{2200}{1,1} + \frac{2420}{(1,1)^2} + \frac{5324}{(1,1)^3}$

9) *Desembutindo 20.600 para zero*

$\frac{20.600}{1,03}$ *20.000*

VA = (data dois) $\longrightarrow$ $VA = 10.000 \,.\, a_{5\,3}$

$$\boxed{VA = 45.797,10}$$

$$P = 20.000 + \frac{45.797,10}{(1,03)^2}$$

10) $$1.000.000 = \frac{667.093,14}{(1,02)^2} + \frac{VA\ (\text{data três})}{(1,02)^3}$$

VA = (data três) = X.a $_{\overline{4}|2}$

> **calculando ou pela tabela temos:**
> $a_{\overline{4}|2} = 3,80773$

Portanto

$$1.000.000 = \frac{667.093,14}{(1,02)^2} + \frac{X.3,80773}{(1,02)^3}$$

Multiplicando todos os termos por $(1,02)^3$

$$1.000.000\ (1,02)^3 = \frac{667.093,14\ .(1,02)^3}{(1,02)^2} + \frac{X.3,80773\ .\ (1,2)^3}{(1,02)^3}$$

$1061208 = 680435 + X.3,80773$

$\boxed{X = 100.000}$

PROBLEMAS DE TAXAS

1) Determine a taxa efetiva anual, com capitalização bimestral, correspondente a taxa nominal de 60%a.a.

2) Determine a taxa nominal anual correspondente à taxa efetiva de 69%a.a. com capitalização semestral.

3) Determine a taxa nominal anual correspondente à taxa efetiva de 107,36%a.a. com capitalização trimestral.

4) Determine a taxa nominal anual com capitalização semestral equivalente a taxa nominal de 40%a.a. com capitalização trimestral.

Taxas - Soluções

1) ***60% a.a*** → ***5% a.bimestre*** → ***10%a.bimestre***

$(1,1)^6$ ***= Tx. efetiva***

⇩

1,771561 ***portanto 77,1561%a.a efetivo***

2) $(\quad)^n$ ***= Tx. efetiva***

Em 1 ano existem 2 semestres, portanto:

$x^2 = 1,69$

$x = \sqrt{1,69}$

$x = 1,3$ ***30% no semestre*** ***60%a.a nominal***

3)

$$\left(\qquad \right)^n = tx.\ efetiva$$

1) Como em um ano há 4 trimestres, então n = 4.
2) No parênteses, colocamos a incógnita x.
3) Uma taxa efetiva de 107,36%** a.a. **significa que o capital inicial (100%) cresceu 107,36% chegando a um montante que representa 207,36% do capital inicial ou, 207,36% à correspondem na forma decimal a 2,0736.

Assim

$$(x)^4 = 2{,}0736$$

$$x = \sqrt[4]{2{,}0736}$$

$$x = 1{,}2$$

Que significa crescimento de 20% ao trimestre, ou seja, 80% a.ano (nominal).

4)

$$(x)^2 = (1{,}1)^4$$

$$x^2 = 1{,}4641$$

$$x = \sqrt{1{,}4641}$$

$$x = 1{,}21$$

21% no semestre
42% a.ano (nominal)

Tabelas Financeiras

Tabela 1

$$\boxed{M = C \cdot (1 + i)^n}$$

Calcula o montante **M** que resultado investimento do capital **C**, após **n** períodos, com taxa de juros composta de **i %** ao período.

	0,5%	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%	25%	30%
1	1,00500	1,01000	1,02000	1,03000	1,04000	1,05000	1,06000	1,07000	1,08000	1,09000	1,10000	1,11000	1,12000	1,13000	1,14000	1,15000	1,16000	1,17000	1,18000	1,19000	1,20000	1,25000	1,30000
2	1,01003	1,02010	1,04040	1,06090	1,08160	1,10250	1,12360	1,14490	1,16640	1,18810	1,21000	1,23210	1,25440	1,27690	1,29960	1,32250	1,34560	1,36890	1,39240	1,41610	1,44000	1,56250	1,69000
3	1,01508	1,03030	1,06121	1,09273	1,12486	1,15763	1,19102	1,22504	1,25971	1,29503	1,33100	1,36763	1,40493	1,44290	1,48154	1,52088	1,56090	1,60161	1,64303	1,68516	1,72800	1,95313	2,19700
4	1,02015	1,04060	1,08243	1,12551	1,16986	1,21551	1,26248	1,31080	1,36049	1,41158	1,46410	1,51807	1,57352	1,63047	1,68896	1,74901	1,81064	1,87389	1,93878	2,00534	2,07360	2,44141	2,85610
5	1,02525	1,05101	1,10408	1,15927	1,21665	1,27628	1,33823	1,40255	1,46933	1,53862	1,61051	1,68506	1,76234	1,84244	1,92541	2,01136	2,10034	2,19245	2,28776	2,38635	2,48832	3,05176	3,71293
6	1,03038	1,06152	1,12616	1,19405	1,26532	1,34010	1,41852	1,50073	1,58687	1,67710	1,77156	1,87041	1,97382	2,08195	2,19497	2,31306	2,43640	2,56516	2,69955	2,83976	2,98598	3,81470	4,82681
7	1,03553	1,07214	1,14869	1,22987	1,31593	1,40710	1,50363	1,60578	1,71382	1,82804	1,94872	2,07616	2,21068	2,35261	2,50227	2,66002	2,82622	3,00124	3,18547	3,37932	3,58318	4,76837	6,27485
8	1,04071	1,08286	1,17166	1,26677	1,36857	1,47746	1,59385	1,71819	1,85093	1,99256	2,14359	2,30454	2,47596	2,65844	2,85259	3,05902	3,27841	3,51145	3,75886	4,02139	4,29982	5,96046	8,15731
9	1,04591	1,09369	1,19509	1,30477	1,42331	1,55133	1,68948	1,83846	1,99900	2,17189	2,35795	2,55804	2,77308	3,00404	3,25195	3,51788	3,80296	4,10840	4,43545	4,78545	5,15978	7,45058	10,60450
10	1,05114	1,10462	1,21899	1,34392	1,48024	1,62889	1,79085	1,96715	2,15892	2,36736	2,59374	2,83942	3,10585	3,39457	3,70722	4,04556	4,41144	4,80683	5,23384	5,69468	6,19174	9,31323	13,78585
11	1,05640	1,11567	1,24337	1,38423	1,53945	1,71034	1,89830	2,10485	2,33164	2,58043	2,85312	3,15176	3,47855	3,83586	4,22623	4,65239	5,11726	5,62399	6,17593	6,77667	7,43008	11,64153	17,92160
12	1,06168	1,12683	1,26824	1,42576	1,60103	1,79586	2,01220	2,25219	2,51817	2,81266	3,13843	3,49845	3,89598	4,33452	4,81790	5,35025	5,93603	6,58007	7,28759	8,06424	8,91610	14,55192	23,29809
13	1,06699	1,13809	1,29361	1,46853	1,66507	1,88565	2,13293	2,40985	2,71962	3,06580	3,45227	3,88328	4,36349	4,89801	5,49241	6,15279	6,88579	7,69868	8,59936	9,59645	10,69932	18,18989	30,28751
14	1,07232	1,14947	1,31948	1,51259	1,73168	1,97993	2,26090	2,57853	2,93719	3,34173	3,79750	4,31044	4,88711	5,53475	6,26135	7,07571	7,98752	9,00745	10,14724	11,41977	12,83918	22,73737	39,37376
15	1,07768	1,16097	1,34587	1,55797	1,80094	2,07893	2,39656	2,75903	3,17217	3,64248	4,17725	4,78459	5,47357	6,25427	7,13794	8,13706	9,26552	10,53872	11,97375	13,58953	15,40702	28,42171	51,18589
16	1,08307	1,17258	1,37279	1,60471	1,87298	2,18287	2,54035	2,95216	3,42594	3,97031	4,59497	5,31089	6,13039	7,06733	8,13725	9,35762	10,74800	12,33030	14,12902	16,17154	18,48843	35,52714	66,54166
17	1,08849	1,18430	1,40024	1,65285	1,94790	2,29202	2,69277	3,15882	3,70002	4,32763	5,05447	5,89509	6,86604	7,98608	9,27646	10,76126	12,46768	14,42646	16,67225	19,24413	22,18611	44,40892	86,50416
18	1,09393	1,19615	1,42825	1,70243	2,02582	2,40662	2,85434	3,37993	3,99602	4,71712	5,55992	6,54355	7,68997	9,02427	10,57517	12,37545	14,46251	16,87895	19,67325	22,90052	26,62333	55,51115	112,45541
19	1,09940	1,20811	1,45681	1,75351	2,10685	2,52695	3,02560	3,61653	4,31570	5,14166	6,11591	7,26334	8,61276	10,19742	12,05569	14,23177	16,77652	19,74838	23,21444	27,25162	31,94800	69,38894	146,19203
20	1,10490	1,22019	1,48595	1,80611	2,19112	2,65330	3,20714	3,86968	4,66096	5,60441	6,72750	8,06231	9,64629	11,52309	13,74349	16,36654	19,46076	23,10560	27,39303	32,42942	38,33760	86,73617	190,04964
21	1,11042	1,23239	1,51567	1,86029	2,27877	2,78596	3,39956	4,14056	5,03383	6,10881	7,40025	8,94917	10,80385	13,02109	15,66758	18,82152	22,57448	27,03355	32,32378	38,59101	46,00512	108,42022	247,06453
22	1,11597	1,24472	1,54598	1,91610	2,36992	2,92526	3,60354	4,43040	5,43654	6,65860	8,14027	9,93357	12,10031	14,71383	17,86104	21,64475	26,18640	31,62925	38,14206	45,92331	55,20614	135,52527	321,18389
23	1,12155	1,25716	1,57690	1,97359	2,46472	3,07152	3,81975	4,74053	5,87146	7,25787	8,95430	11,02627	13,55235	16,62663	20,36158	24,89146	30,37622	37,00623	45,00763	54,64873	66,24737	169,40659	417,53905
24	1,12716	1,26973	1,60844	2,03279	2,56330	3,22510	4,04893	5,07237	6,34118	7,91108	9,84973	12,23916	15,17863	18,78809	23,21221	28,62518	35,23642	43,29729	53,10901	65,03199	79,49685	211,75824	542,80077

Tabela 2

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{C\,.(1+i)^N}$$

	0,5%	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%	25%	30%
1	0,99502	0,99010	0,98039	0,97087	0,96154	0,95238	0,94340	0,93458	0,92593	0,91743	0,90909	0,90090	0,89286	0,88496	0,87719	0,86957	0,86207	0,85470	0,84746	0,84034	0,83333	0,80000	0,76923
2	0,99007	0,98030	0,96117	0,94260	0,92456	0,90703	0,89000	0,87344	0,85734	0,84168	0,82645	0,81162	0,79719	0,78315	0,76947	0,75614	0,74316	0,73051	0,71818	0,70616	0,69444	0,64000	0,59172
3	0,98515	0,97059	0,94232	0,91514	0,88900	0,86384	0,83962	0,81630	0,79383	0,77218	0,75131	0,73119	0,71178	0,69305	0,67497	0,65752	0,64066	0,62437	0,60863	0,59342	0,57870	0,51200	0,45517
4	0,98025	0,96098	0,92385	0,88849	0,85480	0,82270	0,79209	0,76290	0,73503	0,70843	0,68301	0,65873	0,63552	0,61332	0,59208	0,57175	0,55229	0,53365	0,51579	0,49867	0,48225	0,40960	0,35013
5	0,97537	0,95147	0,90573	0,86261	0,82193	0,78353	0,74726	0,71299	0,68058	0,64993	0,62092	0,59345	0,56743	0,54276	0,51937	0,49718	0,47611	0,45611	0,43711	0,41905	0,40188	0,32768	0,26933
6	0,97052	0,94205	0,88797	0,83748	0,79031	0,74622	0,70496	0,66634	0,63017	0,59627	0,56447	0,53464	0,50663	0,48032	0,45559	0,43233	0,41044	0,38984	0,37043	0,35214	0,33490	0,26214	0,20718
7	0,96569	0,93272	0,87056	0,81309	0,75992	0,71068	0,66506	0,62275	0,58349	0,54703	0,51316	0,48166	0,45235	0,42506	0,39964	0,37594	0,35383	0,33320	0,31393	0,29592	0,27908	0,20972	0,15937
8	0,96089	0,92348	0,85349	0,78941	0,73069	0,67684	0,62741	0,58201	0,54027	0,50187	0,46651	0,43393	0,40388	0,37616	0,35056	0,32690	0,30503	0,28478	0,26604	0,24867	0,23257	0,16777	0,12259
9	0,95610	0,91434	0,83676	0,76642	0,70259	0,64461	0,59190	0,54393	0,50025	0,46043	0,42410	0,39092	0,36061	0,33288	0,30751	0,28426	0,26295	0,24340	0,22546	0,20897	0,19381	0,13422	0,09430
10	0,95135	0,90529	0,82035	0,74409	0,67556	0,61391	0,55839	0,50835	0,46319	0,42241	0,38554	0,35218	0,32197	0,29459	0,26974	0,24718	0,22668	0,20804	0,19106	0,17560	0,16151	0,10737	0,07254
11	0,94661	0,89632	0,80426	0,72242	0,64958	0,58468	0,52679	0,47509	0,42888	0,38753	0,35049	0,31728	0,28748	0,26070	0,23662	0,21494	0,19542	0,17781	0,16192	0,14757	0,13459	0,08590	0,05580
12	0,94191	0,88745	0,78849	0,70138	0,62460	0,55684	0,49697	0,44401	0,39711	0,35553	0,31863	0,28584	0,25668	0,23071	0,20756	0,18691	0,16846	0,15197	0,13722	0,12400	0,11216	0,06872	0,04292
13	0,93722	0,87866	0,77303	0,68095	0,60057	0,53032	0,46884	0,41496	0,36770	0,32618	0,28966	0,25751	0,22917	0,20416	0,18207	0,16253	0,14523	0,12989	0,11629	0,10421	0,09346	0,05498	0,03302
14	0,93256	0,86996	0,75788	0,66112	0,57748	0,50507	0,44230	0,38782	0,34046	0,29925	0,26333	0,23199	0,20462	0,18068	0,15971	0,14133	0,12520	0,11102	0,09855	0,08757	0,07789	0,04398	0,02540
15	0,92792	0,86135	0,74301	0,64186	0,55526	0,48102	0,41727	0,36245	0,31524	0,27454	0,23939	0,20900	0,18270	0,15989	0,14010	0,12289	0,10793	0,09489	0,08352	0,07359	0,06491	0,03518	0,01954
16	0,92330	0,85282	0,72845	0,62317	0,53391	0,45811	0,39365	0,33873	0,29189	0,25187	0,21763	0,18829	0,16312	0,14150	0,12289	0,10686	0,09304	0,08110	0,07078	0,06184	0,05409	0,02815	0,01503
17	0,91871	0,84438	0,71416	0,60502	0,51337	0,43630	0,37136	0,31657	0,27027	0,23107	0,19784	0,16963	0,14564	0,12522	0,10780	0,09293	0,08021	0,06932	0,05998	0,05196	0,04507	0,02252	0,01156
18	0,91414	0,83602	0,70016	0,58739	0,49363	0,41552	0,35034	0,29586	0,25025	0,21199	0,17986	0,15282	0,13004	0,11081	0,09456	0,08081	0,06914	0,05925	0,05083	0,04367	0,03756	0,01801	0,00889
19	0,90959	0,82774	0,68643	0,57029	0,47464	0,39573	0,33051	0,27651	0,23171	0,19449	0,16351	0,13768	0,11611	0,09806	0,08295	0,07027	0,05961	0,05064	0,04308	0,03670	0,03130	0,01441	0,00684
20	0,90506	0,81954	0,67297	0,55368	0,45639	0,37689	0,31180	0,25842	0,21455	0,17843	0,14864	0,12403	0,10367	0,08678	0,07276	0,06110	0,05139	0,04328	0,03651	0,03084	0,02608	0,01153	0,00526
21	0,90056	0,81143	0,65978	0,53755	0,43883	0,35894	0,29416	0,24151	0,19866	0,16370	0,13513	0,11174	0,09256	0,07680	0,06383	0,05313	0,04430	0,03699	0,03094	0,02591	0,02174	0,00922	0,00405
22	0,89608	0,80340	0,64684	0,52189	0,42196	0,34185	0,27751	0,22571	0,18394	0,15018	0,12285	0,10067	0,08264	0,06796	0,05599	0,04620	0,03819	0,03162	0,02622	0,02178	0,01811	0,00738	0,00311
23	0,89162	0,79544	0,63416	0,50669	0,40573	0,32557	0,26180	0,21095	0,17032	0,13778	0,11168	0,09069	0,07379	0,06014	0,04911	0,04017	0,03292	0,02702	0,02222	0,01830	0,01509	0,00590	0,00239
24	0,88719	0,78757	0,62172	0,49193	0,39012	0,31007	0,24698	0,19715	0,15770	0,12640	0,10153	0,08170	0,06588	0,05323	0,04308	0,03493	0,02838	0,02310	0,01883	0,01538	0,01258	0,00472	0,00184

Tabela 3

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

	0,5%	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%	25%	30%
1	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
2	2,00500	2,01000	2,02000	2,03000	2,04000	2,05000	2,06000	2,07000	2,08000	2,09000	2,10000	2,11000	2,12000	2,13000	2,14000	2,15000	2,16000	2,17000	2,18000	2,19000	2,20000	2,25000	2,30000
3	3,01502	3,03010	3,06040	3,09090	3,12160	3,15250	3,18360	3,21490	3,24640	3,27810	3,31000	3,34210	3,37440	3,40690	3,43960	3,47250	3,50560	3,53890	3,57240	3,60610	3,64000	3,81250	3,99000
4	4,03010	4,06040	4,12161	4,18363	4,24646	4,31013	4,37462	4,43994	4,50611	4,57313	4,64100	4,70973	4,77933	4,84980	4,92114	4,99338	5,06650	5,14051	5,21543	5,29126	5,36800	5,76563	6,18700
5	5,05025	5,10101	5,20404	5,30914	5,41632	5,52563	5,63709	5,75074	5,86660	5,98471	6,10510	6,22780	6,35285	6,48027	6,61010	6,74238	6,87714	7,01440	7,15421	7,29660	7,44160	8,20703	9,04310
6	6,07550	6,15202	6,30812	6,46841	6,63298	6,80191	6,97532	7,15329	7,33593	7,52333	7,71561	7,91286	8,11519	8,32271	8,53552	8,75374	8,97748	9,20685	9,44197	9,68295	9,92992	11,25879	12,75603
7	7,10588	7,21354	7,43428	7,66246	7,89829	8,14201	8,39384	8,65402	8,92280	9,20043	9,48717	9,78327	10,08901	10,40466	10,73049	11,06680	11,41387	11,77201	12,14152	12,52271	12,91590	15,07349	17,58284
8	8,14141	8,28567	8,58297	8,89234	9,21423	9,54911	9,89747	10,25980	10,63663	11,02847	11,43589	11,85943	12,29969	12,75726	13,23276	13,72682	14,24009	14,77325	15,32700	15,90203	16,49908	19,84186	23,85769
9	9,18212	9,36853	9,75463	10,15911	10,58280	11,02656	11,49132	11,97799	12,48756	13,02104	13,57948	14,16397	14,77566	15,41571	16,08535	16,78584	17,51851	18,28471	19,08585	19,92341	20,79890	25,80232	32,01500
10	10,22803	10,46221	10,94972	11,46388	12,00611	12,57789	13,18079	13,81645	14,48656	15,19293	15,93742	16,72201	17,54874	18,41975	19,33730	20,30372	21,32147	22,39311	23,52131	24,70886	25,95868	33,25290	42,61950
11	11,27917	11,56683	12,16872	12,80780	13,48635	14,20679	14,97164	15,78360	16,64549	17,56029	18,53117	19,56143	20,65458	21,81432	23,04452	24,34928	25,73290	27,19994	28,75514	30,40355	32,15042	42,56613	56,40535
12	12,33556	12,68250	13,41209	14,19203	15,02581	15,91713	16,86994	17,88845	18,97713	20,14072	21,38428	22,71319	24,13313	25,65018	27,27075	29,00167	30,85017	32,82393	34,93107	37,18022	39,58050	54,20766	74,32695
13	13,39724	13,80933	14,68033	15,61779	16,62684	17,71298	18,88214	20,14064	21,49530	22,95338	24,52271	26,21164	28,02911	29,98470	32,08865	34,35192	36,78620	39,40399	42,21866	45,24446	48,49660	68,75958	97,62504
14	14,46423	14,94742	15,97394	17,08632	18,29191	19,59863	21,01507	22,55049	24,21492	26,01919	27,97498	30,09492	32,39260	34,88271	37,58107	40,50471	43,67199	47,10267	50,81802	54,84091	59,19592	86,94947	127,91255
15	15,53655	16,09690	17,29342	18,59891	20,02359	21,57856	23,27597	25,12902	27,15211	29,36092	31,77248	34,40536	37,27971	40,41746	43,84241	47,58041	51,65951	56,11013	60,96527	66,26068	72,03511	109,68684	167,28631
16	16,61423	17,25786	18,63929	20,15688	21,82453	23,65749	25,67253	27,88805	30,32428	33,00340	35,94973	39,18995	42,75328	46,67173	50,98035	55,71747	60,92503	66,64885	72,93901	79,85021	87,44213	138,10855	218,47220
17	17,69730	18,43044	20,01207	21,76159	23,69751	25,84037	28,21288	30,84022	33,75023	36,97370	40,54470	44,50084	48,88367	53,73906	59,11760	65,07509	71,67303	78,97915	87,06804	96,02175	105,93056	173,63568	285,01386
18	18,78579	19,61475	21,41231	23,41444	25,64541	28,13238	30,90565	33,99903	37,45024	41,30134	45,59917	50,39594	55,74971	61,72514	68,39407	75,83636	84,14072	93,40561	103,74028	115,26588	128,11667	218,04460	371,51802
19	19,87972	20,81090	22,84056	25,11687	27,67123	30,53900	33,75999	37,37896	41,44626	46,01846	51,15909	56,93949	63,43968	70,74941	78,96923	88,21181	98,60323	110,28456	123,41353	138,16640	154,74000	273,55576	483,97343
20	20,97912	22,01900	24,29737	26,87037	29,77808	33,06595	36,78559	40,99549	45,76196	51,16012	57,27500	64,20283	72,05244	80,94683	91,02493	102,44358	115,37975	130,03294	146,62797	165,41802	186,68800	342,94470	630,16546
21	22,08401	23,23919	25,78332	28,67649	31,96920	35,71925	39,99273	44,86518	50,42292	56,76453	64,00250	72,26514	81,69874	92,46992	104,76842	118,81012	134,84051	153,13854	174,02100	197,84744	225,02560	429,68087	820,21510
22	23,19443	24,47159	27,29898	30,53678	34,24797	38,50521	43,39229	49,00574	55,45676	62,87334	71,40275	81,21431	92,50258	105,49101	120,43600	137,63164	157,41499	180,17209	206,34479	236,43846	271,03072	538,10109	1067,27963
23	24,31040	25,71630	28,84496	32,45288	36,61789	41,43048	46,99583	53,43614	60,89330	69,53194	79,54302	91,14788	104,60289	120,20484	138,29704	159,27638	183,60138	211,80134	244,48685	282,36176	326,23686	673,62636	1388,46351
24	25,43196	26,97346	30,42186	34,42647	39,08260	44,50200	50,81558	58,17667	66,76476	76,78981	88,49733	102,17415	118,15524	136,83147	158,65862	184,16784	213,97761	248,80757	289,49448	337,01050	392,48424	843,03295	1806,00257

Tabela 4

$$\frac{1}{S_{\overline{n|}\,i}} = \frac{i}{[(1+i)^N - 1]}$$

	0,5%	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%	25%	30%
1	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
2	0,49875	0,49751	0,49505	0,49261	0,49020	0,48780	0,48544	0,48309	0,48077	0,47847	0,47619	0,47393	0,47170	0,46948	0,46729	0,46512	0,46296	0,46083	0,45872	0,45662	0,45455	0,44444	0,43478
3	0,33167	0,33002	0,32675	0,32353	0,32035	0,31721	0,31411	0,31105	0,30803	0,30505	0,30211	0,29921	0,29635	0,29352	0,29073	0,28798	0,28526	0,28257	0,27992	0,27731	0,27473	0,26230	0,25063
4	0,24813	0,24628	0,24262	0,23903	0,23549	0,23201	0,22859	0,22523	0,22192	0,21867	0,21547	0,21233	0,20923	0,20619	0,20320	0,20027	0,19738	0,19453	0,19174	0,18899	0,18629	0,17344	0,16163
5	0,19801	0,19604	0,19216	0,18835	0,18463	0,18097	0,17740	0,17389	0,17046	0,16709	0,16380	0,16057	0,15741	0,15431	0,15128	0,14832	0,14541	0,14256	0,13978	0,13705	0,13438	0,12185	0,11058
6	0,16460	0,16255	0,15853	0,15460	0,15076	0,14702	0,14336	0,13980	0,13632	0,13292	0,12961	0,12638	0,12323	0,12015	0,11716	0,11424	0,11139	0,10861	0,10591	0,10327	0,10071	0,08882	0,07839
7	0,14073	0,13863	0,13451	0,13051	0,12661	0,12282	0,11914	0,11555	0,11207	0,10869	0,10541	0,10222	0,09912	0,09611	0,09319	0,09036	0,08761	0,08495	0,08236	0,07985	0,07742	0,06634	0,05687
8	0,12283	0,12069	0,11651	0,11246	0,10853	0,10472	0,10104	0,09747	0,09401	0,09067	0,08744	0,08432	0,08130	0,07839	0,07557	0,07285	0,07022	0,06769	0,06524	0,06289	0,06061	0,05040	0,04192
9	0,10891	0,10674	0,10252	0,09843	0,09449	0,09069	0,08702	0,08349	0,08008	0,07680	0,07364	0,07060	0,06768	0,06487	0,06217	0,05957	0,05708	0,05469	0,05239	0,05019	0,04808	0,03876	0,03124
10	0,09777	0,09558	0,09133	0,08723	0,08329	0,07950	0,07587	0,07238	0,06903	0,06582	0,06275	0,05980	0,05698	0,05429	0,05171	0,04925	0,04690	0,04466	0,04251	0,04047	0,03852	0,03007	0,02346
11	0,08866	0,08645	0,08218	0,07808	0,07415	0,07039	0,06679	0,06336	0,06008	0,05695	0,05396	0,05112	0,04842	0,04584	0,04339	0,04107	0,03886	0,03676	0,03478	0,03289	0,03110	0,02349	0,01773
12	0,08107	0,07885	0,07456	0,07046	0,06655	0,06283	0,05928	0,05590	0,05270	0,04965	0,04676	0,04403	0,04144	0,03899	0,03667	0,03448	0,03241	0,03047	0,02863	0,02690	0,02526	0,01845	0,01345
13	0,07464	0,07241	0,06812	0,06403	0,06014	0,05646	0,05296	0,04965	0,04652	0,04357	0,04078	0,03815	0,03568	0,03335	0,03116	0,02911	0,02718	0,02538	0,02369	0,02210	0,02062	0,01454	0,01024
14	0,06914	0,06690	0,06260	0,05853	0,05467	0,05102	0,04758	0,04434	0,04130	0,03843	0,03575	0,03323	0,03087	0,02867	0,02661	0,02469	0,02290	0,02123	0,01968	0,01823	0,01689	0,01150	0,00782
15	0,06436	0,06212	0,05783	0,05377	0,04994	0,04634	0,04296	0,03979	0,03683	0,03406	0,03147	0,02907	0,02682	0,02474	0,02281	0,02102	0,01936	0,01782	0,01640	0,01509	0,01388	0,00912	0,00598
16	0,06019	0,05794	0,05365	0,04961	0,04582	0,04227	0,03895	0,03586	0,03298	0,03030	0,02782	0,02552	0,02339	0,02143	0,01962	0,01795	0,01641	0,01500	0,01371	0,01252	0,01144	0,00724	0,00458
17	0,05651	0,05426	0,04997	0,04595	0,04220	0,03870	0,03544	0,03243	0,02963	0,02705	0,02466	0,02247	0,02046	0,01861	0,01692	0,01537	0,01395	0,01266	0,01149	0,01041	0,00944	0,00576	0,00351
18	0,05323	0,05098	0,04670	0,04271	0,03899	0,03555	0,03236	0,02941	0,02670	0,02421	0,02193	0,01984	0,01794	0,01620	0,01462	0,01319	0,01188	0,01071	0,00964	0,00868	0,00781	0,00459	0,00269
19	0,05030	0,04805	0,04378	0,03981	0,03614	0,03275	0,02962	0,02675	0,02413	0,02173	0,01955	0,01756	0,01576	0,01413	0,01266	0,01134	0,01014	0,00907	0,00810	0,00724	0,00646	0,00366	0,00207
20	0,04767	0,04542	0,04116	0,03722	0,03358	0,03024	0,02718	0,02439	0,02185	0,01955	0,01746	0,01558	0,01388	0,01235	0,01099	0,00976	0,00867	0,00769	0,00682	0,00605	0,00536	0,00292	0,00159
21	0,04528	0,04303	0,03878	0,03487	0,03128	0,02800	0,02500	0,02229	0,01983	0,01762	0,01562	0,01384	0,01224	0,01081	0,00954	0,00842	0,00742	0,00653	0,00575	0,00505	0,00444	0,00233	0,00122
22	0,04311	0,04086	0,03663	0,03275	0,02920	0,02597	0,02305	0,02041	0,01803	0,01590	0,01401	0,01231	0,01081	0,00948	0,00830	0,00727	0,00635	0,00555	0,00485	0,00423	0,00369	0,00186	0,00094
23	0,04113	0,03889	0,03467	0,03081	0,02731	0,02414	0,02128	0,01871	0,01642	0,01438	0,01257	0,01097	0,00956	0,00832	0,00723	0,00628	0,00545	0,00472	0,00409	0,00354	0,00307	0,00148	0,00072
24	0,03932	0,03707	0,03287	0,02905	0,02559	0,02247	0,01968	0,01719	0,01498	0,01302	0,01130	0,00979	0,00846	0,00731	0,00630	0,00543	0,00467	0,00402	0,00345	0,00297	0,00255	0,00119	0,00055

Tabela 5

$$a_{\overline{n}|\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$$

	0,5%	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%	25%	30%
1	0,99502	0,99010	0,98039	0,97087	0,96154	0,95238	0,94340	0,93458	0,92593	0,91743	0,90909	0,90090	0,89286	0,88496	0,87719	0,86957	0,86207	0,85470	0,84746	0,84034	0,83333	0,80000	0,76923
2	1,98510	1,97040	1,94156	1,91347	1,88609	1,85941	1,83339	1,80802	1,78326	1,75911	1,73554	1,71252	1,69005	1,66810	1,64666	1,62571	1,60523	1,58521	1,56564	1,54650	1,52778	1,44000	1,36095
3	2,97025	2,94099	2,88388	2,82861	2,77509	2,72325	2,67301	2,62432	2,57710	2,53129	2,48685	2,44371	2,40183	2,36115	2,32163	2,28323	2,24589	2,20958	2,17427	2,13992	2,10648	1,95200	1,81611
4	3,95050	3,90197	3,80773	3,71710	3,62990	3,54595	3,46511	3,38721	3,31213	3,23972	3,16987	3,10245	3,03735	2,97447	2,91371	2,85498	2,79818	2,74324	2,69006	2,63859	2,58873	2,36160	2,16624
5	4,92587	4,85343	4,71346	4,57971	4,45182	4,32948	4,21236	4,10020	3,99271	3,88965	3,79079	3,69590	3,60478	3,51723	3,43308	3,35216	3,27429	3,19935	3,12717	3,05763	2,99061	2,68928	2,43557
6	5,89638	5,79548	5,60143	5,41719	5,24214	5,07569	4,91732	4,76654	4,62288	4,48592	4,35526	4,23054	4,11141	3,99755	3,88867	3,78448	3,68474	3,58918	3,49760	3,40978	3,32551	2,95142	2,64275
7	6,86207	6,72819	6,47199	6,23028	6,00205	5,78637	5,58238	5,38929	5,20637	5,03295	4,86842	4,71220	4,56376	4,42261	4,28830	4,16042	4,03857	3,92238	3,81153	3,70570	3,60459	3,16114	2,80211
8	7,82296	7,65168	7,32548	7,01969	6,73274	6,46321	6,20979	5,97130	5,74664	5,53482	5,33493	5,14612	4,96764	4,79877	4,63886	4,48732	4,34359	4,20716	4,07757	3,95437	3,83716	3,32891	2,92470
9	8,77906	8,56602	8,16224	7,78611	7,43533	7,10782	6,80169	6,51523	6,24689	5,99525	5,75902	5,53705	5,32825	5,13166	4,94637	4,77158	4,60654	4,45057	4,30302	4,16333	4,03097	3,46313	3,01900
10	9,73041	9,47130	8,98259	8,53020	8,11090	7,72173	7,36009	7,02358	6,71008	6,41766	6,14457	5,88923	5,65022	5,42624	5,21612	5,01877	4,83323	4,65860	4,49409	4,33893	4,19247	3,57050	3,09154
11	10,67703	10,36763	9,78685	9,25262	8,76048	8,30641	7,88687	7,49867	7,13896	6,80519	6,49506	6,20652	5,93770	5,68694	5,45273	5,23371	5,02864	4,83641	4,65601	4,48650	4,32706	3,65640	3,14734
12	11,61893	11,25508	10,57534	9,95400	9,38507	8,86325	8,38384	7,94269	7,53608	7,16073	6,81369	6,49236	6,19437	5,91765	5,66029	5,42062	5,19711	4,98839	4,79322	4,61050	4,43922	3,72512	3,19026
13	12,55615	12,13374	11,34837	10,63496	9,98565	9,39357	8,85268	8,35765	7,90378	7,48690	7,10336	6,74987	6,42355	6,12181	5,84236	5,58315	5,34233	5,11828	4,90951	4,71471	4,53268	3,78010	3,22328
14	13,48871	13,00370	12,10625	11,29607	10,56312	9,89864	9,29498	8,74547	8,24424	7,78615	7,36669	6,98187	6,62817	6,30249	6,00207	5,72448	5,46753	5,22930	5,00806	4,80228	4,61057	3,82408	3,24867
15	14,41662	13,86505	12,84926	11,93794	11,11839	10,37966	9,71225	9,10791	8,55948	8,06069	7,60608	7,19087	6,81086	6,46238	6,14217	5,84737	5,57546	5,32419	5,09158	4,87586	4,67547	3,85926	3,26821
16	15,33993	14,71787	13,57771	12,56110	11,65230	10,83777	10,10590	9,44665	8,85137	8,31256	7,82371	7,37916	6,97399	6,60388	6,26506	5,95423	5,66850	5,40529	5,16235	4,93770	4,72956	3,88741	3,28324
17	16,25863	15,56225	14,29187	13,16612	12,16567	11,27407	10,47726	9,76322	9,12164	8,54363	8,02155	7,54879	7,11963	6,72909	6,37286	6,04716	5,74870	5,47461	5,22233	4,98966	4,77463	3,90993	3,29480
18	17,17277	16,39827	14,99203	13,75351	12,65930	11,68959	10,82760	10,05909	9,37189	8,75563	8,20141	7,70162	7,24967	6,83991	6,46742	6,12797	5,81785	5,53385	5,27316	5,03333	4,81219	3,92794	3,30369
19	18,08236	17,22601	15,67846	14,32380	13,13394	12,08532	11,15812	10,33560	9,60360	8,95011	8,36492	7,83929	7,36578	6,93797	6,55037	6,19823	5,87746	5,58449	5,31624	5,07003	4,84350	3,94235	3,31053
20	18,98742	18,04555	16,35143	14,87747	13,59033	12,46221	11,46992	10,59401	9,81815	9,12855	8,51356	7,96333	7,46944	7,02475	6,62313	6,25933	5,92884	5,62777	5,35275	5,10086	4,86958	3,95388	3,31579
21	19,88798	18,85698	17,01121	15,41502	14,02916	12,82115	11,76408	10,83553	10,01680	9,29224	8,64869	8,07507	7,56200	7,10155	6,68696	6,31246	5,97314	5,66476	5,38368	5,12677	4,89132	3,96311	3,31984
22	20,78406	19,66038	17,65805	15,93692	14,45112	13,16300	12,04158	11,06124	10,20074	9,44243	8,77154	8,17574	7,64465	7,16951	6,74294	6,35866	6,01133	5,69637	5,40990	5,14855	4,90943	3,97049	3,32296
23	21,67568	20,45582	18,29220	16,44361	14,85684	13,48857	12,30338	11,27219	10,37106	9,58021	8,88322	8,26643	7,71843	7,22966	6,79206	6,39884	6,04425	5,72340	5,43212	5,16685	4,92453	3,97639	3,32535
24	22,56287	21,24339	18,91393	16,93554	15,24696	13,79864	12,55036	11,46933	10,52876	9,70661	8,98474	8,34814	7,78432	7,28288	6,83514	6,43377	6,07263	5,74649	5,45095	5,18223	4,93710	3,98111	3,32719

Tabela 6

Tabela Price: $\dfrac{1}{a_{\overline{n|}\,i}} = \dfrac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$

	0,5%	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%	25%	30%
1	1,00500	1,01000	1,02000	1,03000	1,04000	1,05000	1,06000	1,07000	1,08000	1,09000	1,10000	1,11000	1,12000	1,13000	1,14000	1,15000	1,16000	1,17000	1,18000	1,19000	1,20000	1,25000	1,30000
2	0,50375	0,50751	0,51505	0,52261	0,53020	0,53780	0,54544	0,55309	0,56077	0,56847	0,57619	0,58393	0,59170	0,59948	0,60729	0,61512	0,62296	0,63083	0,63872	0,64662	0,65455	0,69444	0,73478
3	0,33667	0,34002	0,34675	0,35353	0,36035	0,36721	0,37411	0,38105	0,38803	0,39505	0,40211	0,40921	0,41635	0,42352	0,43073	0,43798	0,44526	0,45257	0,45992	0,46731	0,47473	0,51230	0,55063
4	0,25313	0,25628	0,26262	0,26903	0,27549	0,28201	0,28859	0,29523	0,30192	0,30867	0,31547	0,32233	0,32923	0,33619	0,34320	0,35027	0,35738	0,36453	0,37174	0,37899	0,38629	0,42344	0,46163
5	0,20301	0,20604	0,21216	0,21835	0,22463	0,23097	0,23740	0,24389	0,25046	0,25709	0,26380	0,27057	0,27741	0,28431	0,29128	0,29832	0,30541	0,31256	0,31978	0,32705	0,33438	0,37185	0,41058
6	0,16960	0,17255	0,17853	0,18460	0,19076	0,19702	0,20336	0,20980	0,21632	0,22292	0,22961	0,23638	0,24323	0,25015	0,25716	0,26424	0,27139	0,27861	0,28591	0,29327	0,30071	0,33882	0,37839
7	0,14573	0,14863	0,15451	0,16051	0,16661	0,17282	0,17914	0,18555	0,19207	0,19869	0,20541	0,21222	0,21912	0,22611	0,23319	0,24036	0,24761	0,25495	0,26236	0,26985	0,27742	0,31634	0,35687
8	0,12783	0,13069	0,13651	0,14246	0,14853	0,15472	0,16104	0,16747	0,17401	0,18067	0,18744	0,19432	0,20130	0,20839	0,21557	0,22285	0,23022	0,23769	0,24524	0,25289	0,26061	0,30040	0,34192
9	0,11391	0,11674	0,12252	0,12843	0,13449	0,14069	0,14702	0,15349	0,16008	0,16680	0,17364	0,18060	0,18768	0,19487	0,20217	0,20957	0,21708	0,22469	0,23239	0,24019	0,24808	0,28876	0,33124
10	0,10277	0,10558	0,11133	0,11723	0,12329	0,12950	0,13587	0,14238	0,14903	0,15582	0,16275	0,16980	0,17698	0,18429	0,19171	0,19925	0,20690	0,21466	0,22251	0,23047	0,23852	0,28007	0,32346
11	0,09366	0,09645	0,10218	0,10808	0,11415	0,12039	0,12679	0,13336	0,14008	0,14695	0,15396	0,16112	0,16842	0,17584	0,18339	0,19107	0,19886	0,20676	0,21478	0,22289	0,23110	0,27349	0,31773
12	0,08607	0,08885	0,09456	0,10046	0,10655	0,11283	0,11928	0,12590	0,13270	0,13965	0,14676	0,15403	0,16144	0,16899	0,17667	0,18448	0,19241	0,20047	0,20863	0,21690	0,22526	0,26845	0,31345
13	0,07964	0,08241	0,08812	0,09403	0,10014	0,10646	0,11296	0,11965	0,12652	0,13357	0,14078	0,14815	0,15568	0,16335	0,17116	0,17911	0,18718	0,19538	0,20369	0,21210	0,22062	0,26454	0,31024
14	0,07414	0,07690	0,08260	0,08853	0,09467	0,10102	0,10758	0,11434	0,12130	0,12843	0,13575	0,14323	0,15087	0,15867	0,16661	0,17469	0,18290	0,19123	0,19968	0,20823	0,21689	0,26150	0,30782
15	0,06936	0,07212	0,07783	0,08377	0,08994	0,09634	0,10296	0,10979	0,11683	0,12406	0,13147	0,13907	0,14682	0,15474	0,16281	0,17102	0,17936	0,18782	0,19640	0,20509	0,21388	0,25912	0,30598
16	0,06519	0,06794	0,07365	0,07961	0,08582	0,09227	0,09895	0,10586	0,11298	0,12030	0,12782	0,13552	0,14339	0,15143	0,15962	0,16795	0,17641	0,18500	0,19371	0,20252	0,21144	0,25724	0,30458
17	0,06151	0,06426	0,06997	0,07595	0,08220	0,08870	0,09544	0,10243	0,10963	0,11705	0,12466	0,13247	0,14046	0,14861	0,15692	0,16537	0,17395	0,18266	0,19149	0,20041	0,20944	0,25576	0,30351
18	0,05823	0,06098	0,06670	0,07271	0,07899	0,08555	0,09236	0,09941	0,10670	0,11421	0,12193	0,12984	0,13794	0,14620	0,15462	0,16319	0,17188	0,18071	0,18964	0,19868	0,20781	0,25459	0,30269
19	0,05530	0,05805	0,06378	0,06981	0,07614	0,08275	0,08962	0,09675	0,10413	0,11173	0,11955	0,12756	0,13576	0,14413	0,15266	0,16134	0,17014	0,17907	0,18810	0,19724	0,20646	0,25366	0,30207
20	0,05267	0,05542	0,06116	0,06722	0,07358	0,08024	0,08718	0,09439	0,10185	0,10955	0,11746	0,12558	0,13388	0,14235	0,15099	0,15976	0,16867	0,17769	0,18682	0,19605	0,20536	0,25292	0,30159
21	0,05028	0,05303	0,05878	0,06487	0,07128	0,07800	0,08500	0,09229	0,09983	0,10762	0,11562	0,12384	0,13224	0,14081	0,14954	0,15842	0,16742	0,17653	0,18575	0,19505	0,20444	0,25233	0,30122
22	0,04811	0,05086	0,05663	0,06275	0,06920	0,07597	0,08305	0,09041	0,09803	0,10590	0,11401	0,12231	0,13081	0,13948	0,14830	0,15727	0,16635	0,17555	0,18485	0,19423	0,20369	0,25186	0,30094
23	0,04613	0,04889	0,05467	0,06081	0,06731	0,07414	0,08128	0,08871	0,09642	0,10438	0,11257	0,12097	0,12956	0,13832	0,14723	0,15628	0,16545	0,17472	0,18409	0,19354	0,20307	0,25148	0,30072
24	0,04432	0,04707	0,05287	0,05905	0,06559	0,07247	0,07968	0,08719	0,09498	0,10302	0,11130	0,11979	0,12846	0,13731	0,14630	0,15543	0,16467	0,17402	0,18345	0,19297	0,20255	0,25119	0,30055

Anotações: